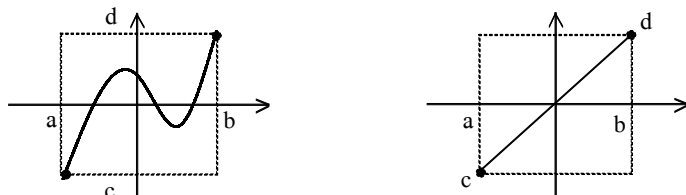


- ۱- کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.
 الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.
 ب) برد و هم دامنه‌ی تابع می‌توانند یکی باشند.
 پ) هم دامنه‌ی تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.
 ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه‌ی آن بازه‌ی $[۰, ۳]$ است.

« پاسخ »



الف) خیر مانند شکل روبه‌رو

- ب) صحیح
 ب) نادرست
 ت) صحیح

۲- اگر دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & x \neq -1 \\ a & x = -1 \end{cases}$ برابر باشند، مقدار a مساوی است.

« پاسخ »

$$x \neq -1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = x - 1 = f(x)$$

$$x = -1 \Rightarrow g(-1) = f(-1) \Rightarrow a = -1 - 1 \Rightarrow a = -2$$

۳- آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x - 1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

« پاسخ »

$$D_f: x \geq 0 \cap x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

$$D_g: x^2 - x \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$D_f \neq D_g$$

۴- اگر دو تابع $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ و $g(x) = a + \frac{b}{x+2}$ مساوی باشند، a ، b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$g(x) = a + \frac{b}{x+2} = \frac{ax+2a+b}{x+2} = f(x) \Rightarrow \frac{ax+2a+b}{x+2} = \frac{3x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ 2a+b=-1 \Rightarrow 6+b=-1 \Rightarrow b=-7 \end{cases}$$

۵- بررسی کنید آیا دو تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

« پاسخ »

$$D_f: \mathbb{R} \Rightarrow 1 - \sin^2 x \geq 0 \Rightarrow \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = |\cos x| \neq \cos x$$

f و g با هم مساوی نیستند.

۶- آیا دو تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x}{x-5} & x \neq 5 \\ 4 & x = 5 \end{cases}$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

« پاسخ »

$$\begin{cases} x=5 \Rightarrow f(x) = g(x) = 4 \\ x \neq 5 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 5x}{x-5} = \frac{x(x-5)}{x-5} = x = f(x) \end{cases}$$

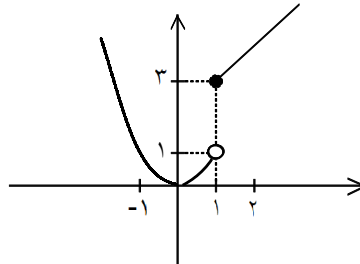
پس نتیجه می‌گیریم که دو تابع f و g با هم مساوی‌اند.

۷- تابع $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حاصل $f(f(-1))$ را به دست آورید.

« پاسخ »



الف) رسم سهمی $(0/5)$

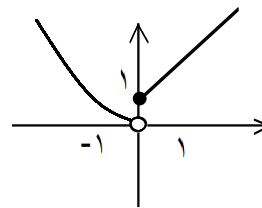
رسم خط $(0/25)$

ب) $f(-1) = 1 \Rightarrow f(f(1)) = f(-1) = 3$

۸- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنیم و سپس مقدار عددی $f(-\sqrt{2})$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 = 2$$



۹- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که سهمی $f(x) = ax^2 + bx$ از نقطه‌ی $(3, 5)$ بگذرد و تساوی $f(-1) = 3$ برقرار باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} (3, 5) \Rightarrow 5 = 9a + 3b \\ (-1, 3) \Rightarrow 3 = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{6} \\ b = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

۱۰- در تابع $y = ax^2 + bx - 2$ مقادیر a و b را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه‌ی $A(-1, 2)$ بگذرد و محور x را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند.

« پاسخ »

$$\begin{cases} A(-1, 2) \Rightarrow 2 = a - b - 2 \\ B(1, 0) \Rightarrow 0 = a + b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

۱۱- تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \geq 0 \\ x - 3, & x < 0 \end{cases}$ مفروض است $f(f(2))$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$f(2) = 1 - 2^2 = -3 \quad (0/5)$$

$$f(f(2)) = f(-3) = -6 \quad (0/25)$$

۱۲- نمودار تابع زیر را رسم کنید.

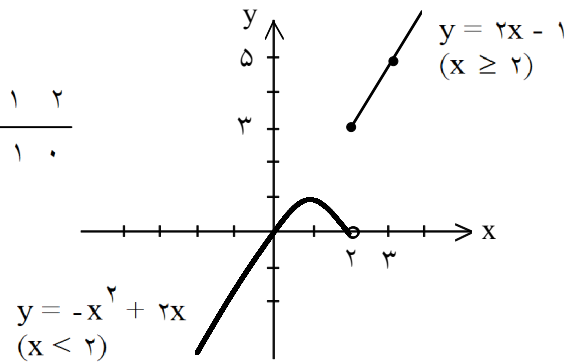
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

« پاسخ »

$$\begin{cases} x < 2 \Rightarrow y = -x^2 + 2x \Rightarrow y = -(x-1)^2 + 1 \\ x \geq 2 \Rightarrow y = 2x - 1 \end{cases}$$

x	0	1	2
y	0	1	0

x	2	3
y	3	5

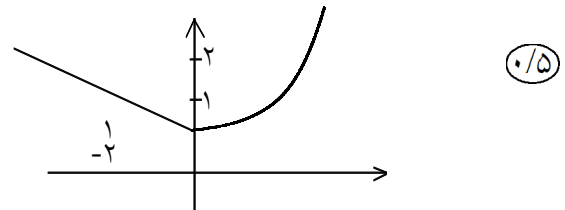


۱۳- نمودار $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & x \geq 0 \\ 1-\frac{x}{2} & x \leq 0 \end{cases}$ را رسم کرده ، سپس $f(f(-4))$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(-4) = 3 \quad (0/25)$$

$$f(3) = 10 \quad (0/25)$$



۱۴- مقادیر a و b را چنان بیابید که مجموعه‌ی $g = \{(-1, b+3), (7, 1), (-1, 4-a), (7, a)\}$ یک تابع باشد.

« پاسخ »

$$a = 1 \quad (0/25)$$

$$b + 3 = 3 \quad (0/25) \Rightarrow b = 0 \quad (0/25)$$

۱۵- b و a را طوری محاسبه کنید که دو تابع $y = ax^2 + x + b$ و $y = x + 3a$ همدیگر را روی محور عرض‌ها به عرض ۱- قطع کنند.

« پاسخ »

$$(0, -1) \in \text{تابع} \Rightarrow \begin{cases} -1 = b \\ -1 = 3a \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۶- تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - 1 & x < -1 \\ x^3 + b & x \geq -1 \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را طوری بیابید که $f(-2) = 7$ و نمودار تابع از نقطه‌ی $A(1, 3)$ بگذرد.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2a(-2)^2 - 1 = 7 &\Rightarrow a = 1 \\ 1^3 + b = 3 &\Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

۱۷- اگر $f = \{(4, a^2), (3, -1), (4, 2)\}$ معرف تابع باشد، مقدار a را تعیین کنید.

« پاسخ »

$$a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2} \quad (4, a^2) = (4, 2) \text{ که برای آن که } f \text{ تابع باشد لازم است}$$

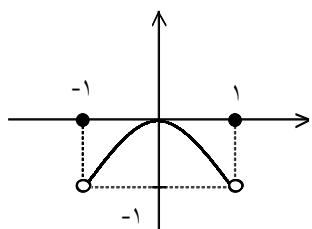
۱۸- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a، b و c را طوری بیابید که سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و از نقطه‌ی $A(2, 3)$ نیز بگذرد.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} (0, 3) \in \text{سهمی} &\Rightarrow 3 = a \times (0)^2 + b \times (0) + c \Rightarrow c = 3 \\ (1, 0) \in \text{سهمی} &\Rightarrow 0 = a \times (1)^2 + b \times (1) + c \\ (2, 3) \in \text{سهمی} &\Rightarrow 3 = a \times (2)^2 + b \times (2) + c \\ \begin{cases} a + b = -3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow a = 3, b = -6 \end{aligned}$$

۱۹- نمودار تابع $y = x^2 \lceil \lceil x \rceil - x \rceil$ روی بازه $[-1, 1]$ را رسم کنید. ($\lceil \cdot \rceil$ نماد جزء صحیح است.)

« پاسخ »



$$0 \leq x - \lceil x \rceil < 1 \xrightarrow{\times (-1)} -1 < \lceil x \rceil - x \leq 0$$

$$\begin{cases} x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lceil \lceil x \rceil - x \rceil = -1 \Rightarrow y = -x^2 \\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lceil \lceil x \rceil - x \rceil = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

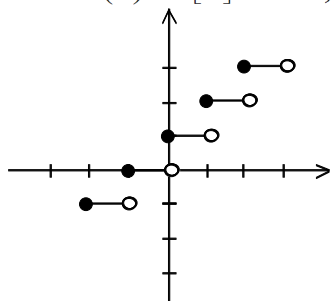
۲۰- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = \lceil x \rceil + 1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = \lceil \frac{1}{2}x \rceil$, $-4 \leq x < 4$

« پاسخ »

الف) $f(x) = \lceil x \rceil + 1$, $-2 \leq x < 3$



$$-2 \leq x < -1 \rightarrow \lceil x \rceil = -2 \rightarrow y = -1$$

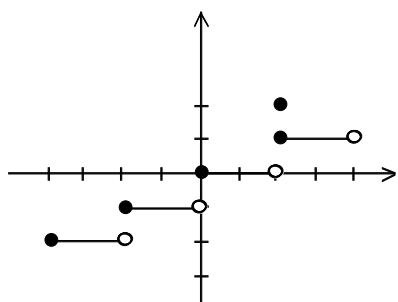
$$-1 \leq x < 0 \rightarrow \lceil x \rceil = -1 \rightarrow y = 0$$

$$0 \leq x < 1 \rightarrow \lceil x \rceil = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \leq x < 2 \rightarrow \lceil x \rceil = 1 \rightarrow y = 2$$

$$2 \leq x < 3 \rightarrow \lceil x \rceil = 2 \rightarrow y = 3$$

ب) $f(x) = \lceil \frac{1}{2}x \rceil$, $-4 \leq x < 4$



$$-4 \leq x < -2 \quad -2 \leq \frac{1}{2}x < -1 \rightarrow f(x) = -2$$

$$-2 \leq x < 0 \quad -1 \leq \frac{1}{2}x < 0 \rightarrow f(x) = -1$$

$$0 \leq x < 2 \quad 0 \leq \frac{1}{2}x < 1 \rightarrow f(x) = 0$$

$$2 \leq x < 4 \quad 1 \leq \frac{1}{2}x < 2 \rightarrow f(x) = 1$$

۲۱- نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هریک را معلوم کنید.

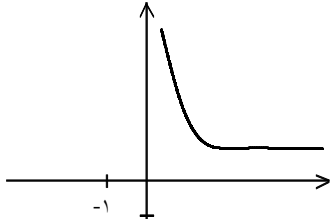
$$f(x) = \sqrt{x-2} + 5 \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{الف)}$$

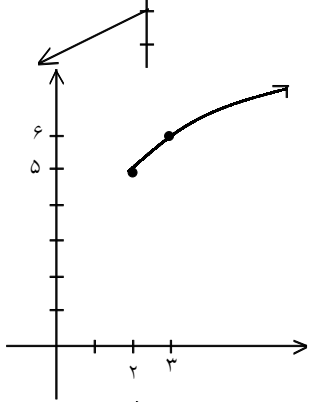
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ت)}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{پ)}$$

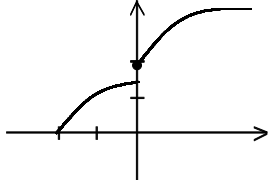
« پاسخ »



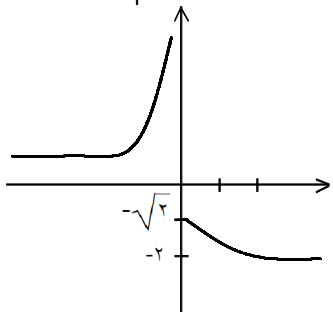
الف) $D = \mathbb{R}$
برد $(-\infty, 2] \cup (0, \infty)$



ب) $D = [2, \infty)$
برد $[5, \infty)$

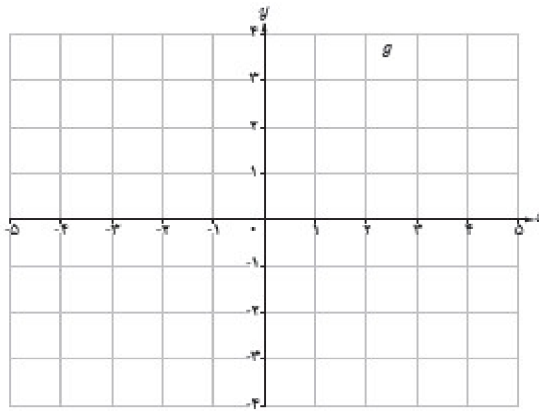
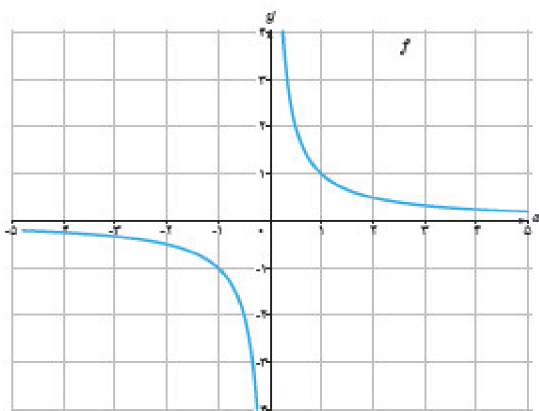


پ) $D = [2, \infty)$
برد $[2, \infty) \cup [0, \sqrt{2}]$



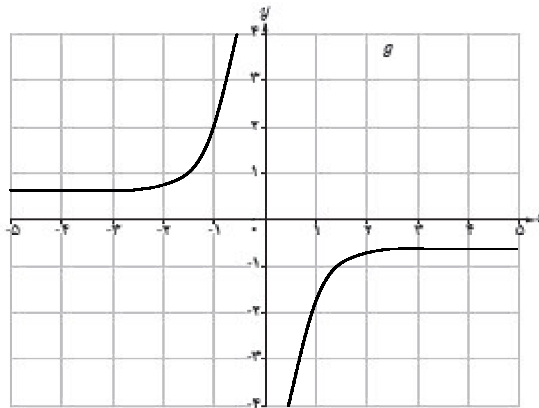
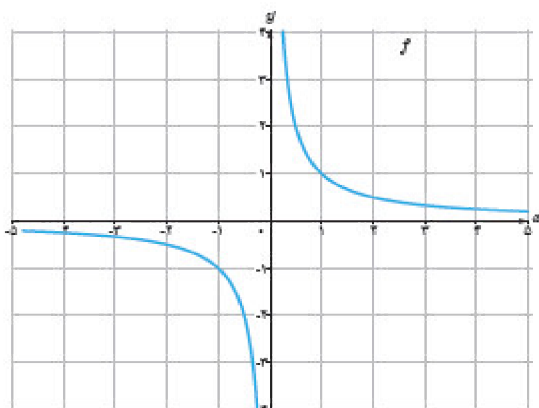
ت) $D = \mathbb{R}$
برد $(0, \infty) \cup (-\infty, -2]$

۲۲- توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.



« پاسخ »

نمودار g از قرینه کردن نمودار f نسبت به محور x ها به دست می‌آید چون مقادیر تابع در نمودار g قرینه هستند نسبت به محور x ها



۲۳- دامنه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - 4[x]^2}$ چه قدر است؟

« پاسخ »

$$1 - 4[x]^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq [x] \leq \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$[x] = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow D = [0, 1)$$

۲۴- مقدار x را حساب کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف) $4x^2 - 5 = [x] + [-x]$

ب) $3x^2 - 4x = \frac{1}{[x] + [-x]}$

« پاسخ »

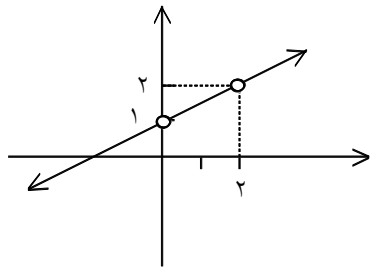
$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}$$

الف) $x \in Z \Rightarrow 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ غ ق ق

$x \notin Z \Rightarrow 4x^2 - 5 = -1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ غ ق ق

$x \in Z \Rightarrow$ جواب ندارد زیرا مخرج صفر می شود

ب) $x \notin Z \Rightarrow 3x^2 - 4x = \frac{1}{-1} \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{1}{3} & \text{ق ق} \end{cases}$



۲۵- نمودار یک تابع گویا به صورت زیر است. ضابطه‌ی آنرا بنویسید.

« پاسخ »

ضابطه تابع خطی که از نقاط $A(0, 1)$ و $B(2, 2)$ می‌گذرد را حساب می‌کنیم.

$$f(x) = ax + b$$

$$A(0, 1) \Rightarrow a(0) + b = 1 \Rightarrow b = 1$$

$$B(2, 2) \Rightarrow 2a + b = 2 \xrightarrow{b=1} 2a + 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

چون تابع در $x = 0$ و $x = 2$ توخالی است، بنابراین در x و $(x - 2)$ ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$y = \frac{x(x - 2) \left(\frac{1}{2}x + 1 \right)}{x(x - 2)}$$

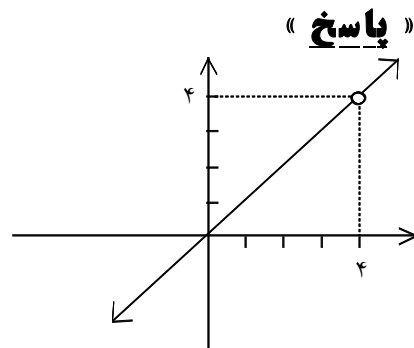
۲۶- اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + a + 4}{x - 4}$ تابع همانی باشد، مقدار a را مشخص کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = x(x \neq 4) \Rightarrow \frac{x^2 + ax + a + 4}{x - 4} = x$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} + ax + a + 4 = \cancel{x^2} - 4x \Rightarrow ax + 4x + a + 4 = 0$$

$$x(a + 4) + a + 4 = 0 \Rightarrow (a + 4)(x + 1) = 0$$

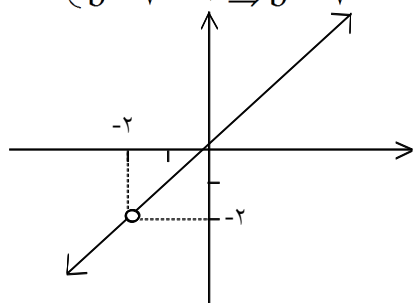
$$\Rightarrow a + 4 = 0 \Rightarrow a = -4$$



۲۷- اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + b - 7}{x + 2}$ تابع همانی باشد، مقدار a و b را مشخص کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x) = x(x \neq -2) \Rightarrow \frac{x^2 + ax + b - 7}{x + 2} = x \Rightarrow \cancel{x^2} + ax + b - 7 = \cancel{x^2} + 2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 7 = 0 \Rightarrow b = 7 \end{cases}$$



$$D = \mathbb{R} - \{-2\}$$

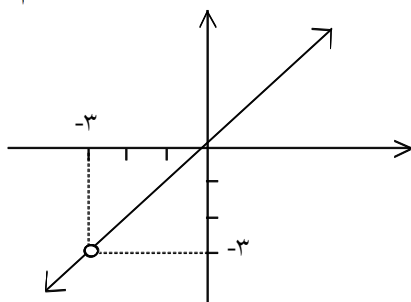
« پاسخ »

۲۸- اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + a - 3}{x + 3}$ تابع همانی باشد، مقدار a را به دست آورید و نمودار تابع را رسم کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = x(x \neq -3) \Rightarrow \frac{x^2 + ax + a - 3}{x + 3} = x \Rightarrow \cancel{x} + ax + a - 3 = \cancel{x} + 3x \Rightarrow ax + a - 3 = 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$



$$D = \mathbb{R} - \{-3\}$$

۲۹- اگر $f(x) = \frac{x - 7}{x^2 + ax + b - 1}$ دامنه اش $\mathbb{R} - \{2\}$ باشد، a , b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b - 1 = 4 \Rightarrow b = 5 \end{cases}$$

۳۰- اگر $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$ باشد، دامنه $f(2x + 5)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x + 7 \geq 0 &\xrightarrow{\times(-1)} x^2 - 6x - 7 \leq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 7) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7 \\ \Rightarrow -1 \leq 2x + 5 \leq 7 &\xrightarrow{-5} -6 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} -3 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_{f(2x+5)} = [-3, 1] \end{aligned}$$

۳۱- دامنه تابع زیر را حساب کنید.

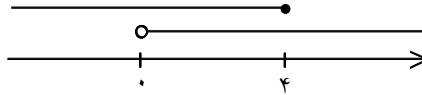
$$f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x+|x|}$$

« پاسخ »

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \quad (1)$$

$$x+|x| \neq 0 \Rightarrow x > 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (0, 4]$$



۳۲- دامنه توابع زیر را حساب کنید.

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x} \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = \sqrt{4-x^2} \quad \text{الف)}$$

« پاسخ »

$$\text{الف)} 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$

$$D_f = [-2, 2]$$

$$\text{ب)} x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x(x-5) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ یا } x \geq 5$$

$$D_g = (-\infty, 0] \cup [5, +\infty)$$

۳۳- اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-4x^2 + ax - 1}$ برابر $\{b\}$ باشد، همه مقادیر a, b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\Delta = 0 \Rightarrow a^2 - 16 = 0 \Rightarrow a = \pm 4 \xrightarrow{a=4} -4x^2 + 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \xrightarrow{a=-4} -4x^2 - 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

۳۴- رسم کنید.

$$y = \frac{|x^3 - 1|}{x^2 + x + 1}$$

« پاسخ »

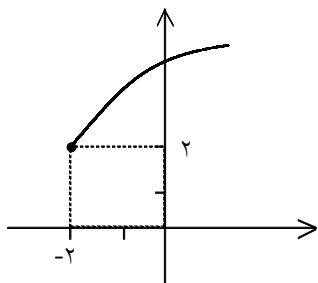
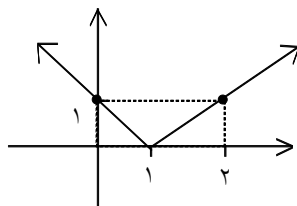
همواره مثبت

$$y = \frac{|(x-1)(x^2+x+1)|}{x^2+x+1} = \frac{|x-1|(x^2+x+1)}{x^2+x+1}$$

$$= |x-1|$$

x	0	1	2
y	1	0	1

D = R



۳۵- نمودار $f(x) = \sqrt{x-a} + b - 1$ به صورت زیر است.

الف) a, b را حساب کنید.

ب) $f\left(\frac{1}{4}\right)$ را بنویسید.

« پاسخ »

الف) نمودار تابع $y = \sqrt{x-a} + b - 1$ واحد به طرف x های منفی رفته بنابراین درون رادیکال $x + 2$ است و سپس دو واحد بالا رفته بنابراین باید کل تابع را با عدد ۲ جمع کنیم.

$$f(x) = \sqrt{x-a} + b - 1 \Rightarrow \begin{cases} -a = 2 \Rightarrow a = -2 \\ b - 1 = 2 \Rightarrow b = 3 \end{cases}$$

ب) مقدار تابع در $x = \frac{1}{4}$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} + 2 = \sqrt{\frac{9}{4}} + 2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

۳۶- دامنه و برد توابع زیر را حساب کنید.

الف) $f(x) = 2 - \sqrt{2 - x}$

ب) $g(x) = 2\sqrt{5 - x} + 7$

« پاسخ »

(الف)

$D_f: 2 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$

$R_f: \sqrt{2 - x} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{2 - x} \leq 0 \xrightarrow{+2} 2 - \sqrt{2 - x} \leq 2 \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow R_f = (-\infty, 2]$

(ب)

$D_g: 5 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5 \Rightarrow D_g = (-\infty, 5]$

$R_g: \sqrt{5 - x} \geq 0 \xrightarrow{\times 2} 2\sqrt{5 - x} \geq 0 \xrightarrow{+7} 2\sqrt{5 - x} + 7 \geq 7 \Rightarrow y \geq 7 \Rightarrow R_f = [7, +\infty)$

۳۷- به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به دست آورید:

الف) $f(x) = (x + 5)^2, x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x - 1| + 1, x \geq 2$

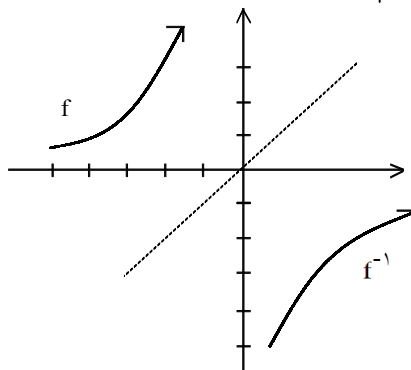
پ) $f(x) = (x - 3)^2$

ت) $f(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

« پاسخ »

$f(x) = (x + 5)^2$

-5	-4	-3
0	1	4



$$y = (x + 5)^2$$

$$y^2 = x + 5$$

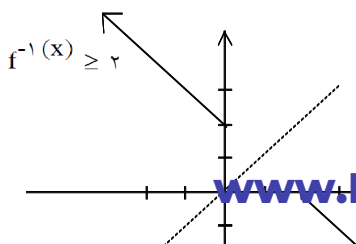
$$y^2 - 5 = x$$

$$f^{-1}(y) = y^2 - 5$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 5$$

ب) $f(x) = -|x - 1| + 1$

2	3	4
0	-1	-2



$$y = -|x - 1| + 1$$

$$y - 1 = -|x - 1|$$

$$1 - y = |x - 1|$$

$$1 - y = x - 1$$

$$y = x - 2$$

۳۸- ثابت کنید توابع $f(x) = 3x - 1$ و $y(x) = \frac{x+1}{3}$ وارون یکدیگرند.

« پاسخ »

باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g تابع همانی می‌شود.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3\left(\frac{x+1}{3}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x \quad (x \in D_g)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{3x - 1 + 1}{3} = \frac{3x}{3} = x \quad (x \in D_f)$$

۳۹- وارون تابع $f(x) = \frac{x}{3x-2}$ را بیابید.

« پاسخ »

$$y = \frac{x}{3x-2} \Rightarrow 3xy - 2y = x \Rightarrow x(3y-1) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{3y-1} \Rightarrow y^{-1} = \frac{2x}{3x-1}$$

۴۰- اگر تابع خطی f از نقاط $(2, 1)$ و $(4, 5)$ عبور کند، ضابطه‌ی تابع وارون آنرا به دست آورید.

« پاسخ »

ابتدا ضابطه خطی تابع f را می‌یابیم:

$$\begin{cases} (2, 1) \in f \\ (4, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow y - 1 = \frac{5-1}{4-2}(x-2) \Rightarrow y = f(x) = 2x - 3$$

$$y = 2x - 3 \Rightarrow y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \Rightarrow y = \frac{x+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

۴۱- آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.

« پاسخ »

اگر به ازای دو مقدار متمایز از دامنه‌ی تابع $(x_1 \neq x_2)$ ، مقادیر y (خروجی) برابر باشد تابع یک به یک نیست. در

$$f(0) = 0 \text{ و } f(2) = 0$$

این تابع خواهیم داشت:

پس تابع یک به یک نیست.

۴۲- اگر $f(x) = 35 - 7x$ باشد، دامنه $h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 35 - 7x \Rightarrow y = 35 - 7x \Rightarrow 7x = 35 - y \Rightarrow x = \frac{35 - y}{7} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{35 - x}{7}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{35 - x}{7}$$

$$h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{\frac{35 - x}{7}} \Rightarrow h(x) = \frac{7}{35 - x} \Rightarrow 35 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 35$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{35\}$$

۴۳- اگر $f(x) = 6 - 2x$ باشد، دامنه $h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(x) = 6 - 2x \Rightarrow y = 6 - 2x \Rightarrow 2x = 6 - y \xrightarrow{\div 2} x = 3 - \frac{y}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = 3 - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 3 - \frac{x}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{3 - \frac{x}{2}} = \frac{2}{6 - x}$$

$$6 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 6 \Rightarrow D_h = \mathbb{R} - \{6\}$$

۴۴- ضابطه‌ی وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

ب) $g(x) = \frac{2}{3}x - 3$

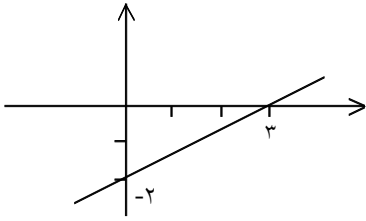
الف) $f(x) = 1 - 7x$

« پاسخ »

الف) $y = 1 - 7x \Rightarrow 7x = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1 - y}{7} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{1 - x}{7} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - x}{7}$

ب) $y = \frac{2}{3}x - 3 \Rightarrow \frac{2}{3}x = y + 3 \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} x = \frac{3}{2}y + \frac{9}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{2}{3}x + \frac{9}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2}{3}x + \frac{9}{2}$

۴۵- اگر نمودار تابع خطی f به صورت زیر باشد، حاصل $\frac{1 + f^{-1}(1)}{1 - f(-1)}$ را حساب کنید.



« پاسخ »

$$A(3, 0) \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$B(0, -2) \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

$$f(-1) = \frac{2}{3}(-1) - 2 = -\frac{2}{3} - 2 = -\frac{8}{3}$$

$$f^{-1}(1) = a \Rightarrow f(a) = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a - 2 = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1 + f^{-1}(1)}{1 - f(-1)} = \frac{1 + \frac{9}{2}}{1 - \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{3}} = \frac{33}{14}$$

۴۶- اگر $f(x) + f(1) = 4x + 6$ باشد، $f^{-1}(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x = 1 \Rightarrow f(1) + f(1) = 10 \Rightarrow 2f(1) = 10 \Rightarrow f(1) = 5 \xrightarrow{f(1) = 5} f(x) + 5 = 4x + 6$$

$$\Rightarrow f(x) = 4x + 1$$

$$y = 4x + 1 \Rightarrow y - 1 = 4x \Rightarrow x = \frac{y - 1}{4} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x - 1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{4}$$

۴۷- اگر f یک تابع خطی باشد و $f(1) = 3$ و $f(4) = 9$ باشد معادله $f^{-1}(x) = f(x)$ را حل کنید.

« پاسخ »

چون تابع $f(x)$ خطی است بنابراین ضابطه‌ی آن $f(x) = ax + b$ است.

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$$

$$f(4) = 9 \Rightarrow 4a + b = 9 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y-1}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

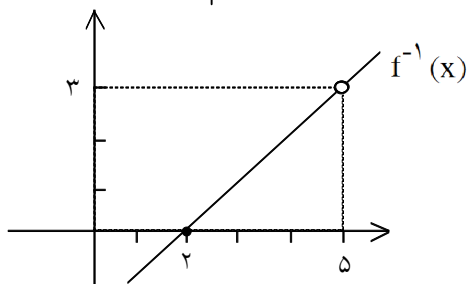
$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = 2x + 1 \Rightarrow 4x + 2 = x - 1 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$$

۴۸- وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$ را رسم کنید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)} = x + 2$$

x	۰	۳	→ در تابع وارون	x	۲	۵
y	۲	۵		y	۰	۳



۴۹- اگر $f(x) = 2x + 1$ دامنه‌ی $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f^{-1}(x)}$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 1 = 2x \Rightarrow \frac{y-1}{2} = x \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{x-1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_g = [-\frac{1}{2}, +\infty) - \{1\}$$

۵۰- در جدول زیر وارون توابع را نوشته و مشخص کنید وارون کدام تابع، تابع است؟

$f = \{(1, 5), (3, 7), (4, 9)\}$	$f^{-1} =$
$g = \{(1, 2), (3, 2), (5, 10)\}$	$g^{-1} =$
$h = \{(1, 2), (3, 4), (5, 2)\}$	$h^{-1} =$

« پاسخ »

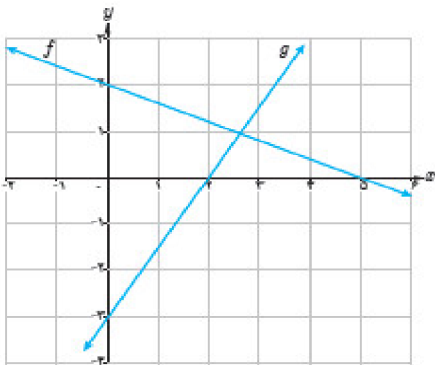
برای نوشتن وارون یک تابع باید جای مؤلفه‌ی اول و دوم را عوض کنیم.

$$f^{-1} = \{(5, 1), (7, 3), (9, 4)\} \text{ تابع است } f^{-1}$$

$$g^{-1} = \{(2, 1), (2, 3), (10, 5)\} \text{ تابع نیست } g^{-1}$$

$$h^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (2, 5)\} \text{ تابع نیست } h^{-1}$$

۵۱- نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



« پاسخ »

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-2}{5} \quad y - 2 = -\frac{2}{5}x \quad y = -\frac{2}{5}x + 2 \quad \text{ضابطه } f$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix} \quad m = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{2}(x - 2) \quad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \text{ضابطه } g$$

$$(f+g)(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3 = \frac{11}{10}x - 1$$

$$(f-g)(x) = \frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = \frac{-11}{10}x + 5$$

$$(f \times g)(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right) \left(\frac{3}{2}x - 3\right)$$

۵۲- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ و $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ، دامنه و ضابطه‌ی توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$D_f = \mathbb{R} \quad x - x^2 \geq 0 \quad D_g = [-2, 2]$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{\left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$D_{f \circ g(x)} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in \mathbb{R}\} = [-2, 2]$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{4 - \left(\sqrt{x^2 + 5}\right)^2} = \sqrt{4 - x^2 - 5} = \sqrt{-x^2 - 1}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 5} \in [-2, 2]\} = \emptyset$$

چون اگر $-2 \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 + 5 \leq 4$ که درست نمی‌باشد.

۵۳- اگر $f = \left\{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (3, -5)\right\}$ و

$g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع $f + g$ و $f - g$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

$$(f + g)(x) = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\}$$

$$(f - g)(x) = \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$\frac{f}{g}(x) = \left\{ \left(-4, -\frac{13}{7}\right), \left(0, -\frac{5}{3}\right) \right\}$$

۵۴- کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن‌گاه $(f \circ g)(4) = 35$

ب) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ آن‌گاه $\left(\frac{f}{g}\right)(2) = 1$

پ) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن‌گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ آن‌گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$

« پاسخ »

$$f \circ g(4) = f(g(4)) = f(7) = 5$$

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{6}{6} = 1$$

$$f \circ g(5) = f(g(5)) = f(9) = 3 = g(2)$$

$$f \circ g(x) = \left(\sqrt{x^2 - 4}\right)^2 - 4 = x^2 - 8$$

الف) درست

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست

ث) نادرست

ج) درست

۵۵- اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2 - x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f - g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه‌ی آن‌ها به دست آورید.

« پاسخ »

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{4x}{2-x} \quad (D_f \cap D_g) \setminus \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(f - g)(x) = 4x - (2 - x) = 5x - 2$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = 4(2 - x) = 8 - 4x$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۵۶- اگر $f = \{(1, 2), (3, 7), (4, 9)\}$ و $g = \{(-1, 1), (5, 3), (7, 4)\}$ دو تابع باشند.
الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.
ب) مقدار $(g \circ f)(3)$ را بیابید.

« پاسخ »

$$\begin{array}{ccc} -1 & \xrightarrow{g} & 1 \xrightarrow{f} 2 \\ 5 & \xrightarrow{g} & 3 \xrightarrow{f} 7 \\ 7 & \xrightarrow{g} & 4 \xrightarrow{f} 9 \end{array}$$

الف) (الف)

$$f \circ g = \{(-1, 2), (5, 7), (7, 9)\}$$

ب) (ب)

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(7) = 4$$

۵۷- الف) توابع $f(x) = \frac{x+3}{2x}$ و $g(x) = 3x-1$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $(f \circ g)^{-1}(5)$ را به دست آورید.

« پاسخ »

(الف)

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad (0/25) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x-1 \neq 0\} \quad (0/75) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\} \quad (0/25)$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(5) = g^{-1}(64) = 4 \quad (0/5)$$

ب) (ب)

۵۸- اگر $g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ و $f(x) = 3x^2 + x - 3$ ، آن‌گاه $g \circ f(x) = 0$ چند ریشه دارد؟

« پاسخ »

$$g(f(x)) = (f(x))^3 + (f(x))^2 - f(x) - 1 = (f(x)^2 - 1)(f(x) + 1) = 0 \Rightarrow f(x) = \pm 1$$

$$f(x) = 1 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 1 \Rightarrow 3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}, x = 1$$

$$f(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = -1 \Rightarrow 3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, x = -1$$

چهار جواب دارد.

۵۹- اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$ باشند:

الف) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

ب) مقدار $(2f - g)(3)$ را محاسبه کنید.

« پاسخ »

الف) $D_f = [-1, +\infty)$ (۰/۲۵) $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$ (۰/۲۵)

ب) $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-1, +\infty) - \{2\} - \{-1\} = (-1, 2) \cup (2, +\infty)$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

$2f(3) - g(3) = 2(2) - 4 = 0$ (۰/۲۵)
(۰/۲۵)

۶۰- اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, 6), (8, 0)\}$ دو تابع باشند:

الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

« پاسخ »

(۰/۵) $f \circ g = \{(0, 1), (5, \sqrt{3})\}$

الف) $D_f = [3, +\infty)$ $D_g = \{0, 3, 5, 8\}$ $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$ (ب)
(۰/۲۵)

$D_{\frac{f}{g}} = \{3, 5, 8\} - \{8\} = \{3, 5\}$
(۰/۲۵) (۰/۲۵)

۶۱- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$.

« پاسخ »

(۱) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 - 4x + 5$

در تابع $f(x) = x^2 + 2x + 2$ ، $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم:

(۲) $f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2$

سمت چپ دو معادله‌ی ۱ و ۲ با هم برابرند، پس سمت راست آن‌ها نیز با هم برابر است.

$g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 + 1 = (x - 2)^2 + 1$

$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2) \Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$

۶۲- اگر $f = \left\{ (-4, 13), (-1, 7), (0, 5), \left(\frac{5}{2}, 0\right), (3, -5) \right\}$ و

$g = \{(-4, -7), (-2, 5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ باشد، توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به

دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f+g &= \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\} \\ f-g &= \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\} \\ \frac{f}{g} &= \left\{ \left(-4, \frac{-13}{7}\right), \left(0, \frac{-5}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

۶۳- برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آنرا محاسبه کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} - \{1\} & D_g : x-3 \geq 0 &\Rightarrow D_g = [3, +\infty) \\ D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \geq 3 \mid \sqrt{x-3} \neq 1\} = [3, +\infty) - \{4\} \\ x-3 &\neq 1, x \neq 4 \end{aligned}$$

۶۴- اگر $(f+g)(x) = 5x+4$ و $(f-g)(x) = 2-3x$ باشد، دامنه $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = 5x+4 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = 2-3x \\ \Rightarrow 2f(x) &= 2x+6 \Rightarrow f(x) = x+3 \\ \Rightarrow x+3+g(x) &= 5x+4 \Rightarrow g(x) = 4x+1 \\ D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{4}\right\} \end{aligned}$$

۶۵- اگر $f(x) = ax+b$ و $g(x) = 2x+7$ و $f(1) = 4$ باشد در صورتی که $(f+g)(2) = 17$ باشد a ، b را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \Rightarrow a+b = 4 \\ (f+g)(2) &= f(2) + g(2) = 2a+b+4+7 = 17 \Rightarrow 2a+b = 6 \\ \begin{cases} a+b = 4 \\ 2a+b = 6 \end{cases} &\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$