فصل دوم

تابع

- درس اول : توابع ثابت ، چند ضابطه ای ، همانی
- درس دوم : توابع پلکانی و قدر مطلقی
- درس سوم : اعمال بر روی توابع ۲

بارم فصل ۲:

نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۷ تا (ص ٤٤)	۸	۸

فصل ۲ درس ۱: توابع ثابت، چند ضابطه ای، همانی

اهداف درس ۱:

- یادآوری مفاهیم تابع، دامنه و برد و روش های مختلف نمایش تابع؛
- معرفی تابع های ثابت، چند ضابطه ای و همانی و شناخت آنها در مسائل واقعی؛
- تأثیر و توجه به دامنه تابع در رسم نمودار تابع؛
- تشخیص متغیر مستقل و وابسته در هر مسئله با توجه به واحد های معرفی شده برای محورهای مختصات؛
- مهارت مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع و مهارت تحلیل نمودار یک تابع با مسائل واقعی؛
- آشنایی با روش؛ «حل مسئله »
- ارتباط و کاربرد شاخه های گوناگون دانش ریاضی با یکدیگر، مانند ارتباط آمار و تابع .

یادآوری مفاهیم تابع، دامنه و برد و روش های مختلف نمایش تابع؛

تعریف تابع: یک رابطه هنگامی تابع است که بتوانیم به هر عضو از مجموعه A (متغیرمستقل)دقیقا یک عضو از B (متغیر وابسته) را نسبت دهیم.

نمایش های مختلف تابع: (کاردرکلاس ص ۲۳)

۱)نمایش جدولی: نمایش جدولی یک رابطه ، وقتی تابع است که اعدادسطر اول برابر نباشند یا اگر برابر بودند اعداد ردیف پایین مربوط به آن هم برابر باشند

۲) نمایش پیکانی : نمایش پیکانی یک رابطه ، وقتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول دقیقا یک پیکان خارج شود

۳)نمایش زوج مرتبی: نمایش زوج مرتبی یک رابطه ، وقتی تابع است که مولفه های اول برابر نباشد و اگر برابر بود ، مولفه های دوم آن هم برابر باشد.

۴) نمایش مختصاتی: نمایش مختصاتی یک رابطه ، وقتی تابع است که هر خط عمودی (موازی محور عرض‌ها)، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

۵) نمایش توصیفی

دامنه و بُرد تابع: درهر تابع ، همه مقدارهایی که متغیر مستقل می تواند بگیرد را دامنه و همه مقدارهایی که متغیر وابسته می تواند بگیرد را برد می گوییم.

دامنه تابع **f** را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می دهیم.

۶)ضابطه جبری تابع:رابطه بین دامنه و برد تابع **f** را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی $y=f\left(x\right)$ نمایش داد این‌گونه نمایش تابع را، نمایش جبری یا قانون یا ضابطه تابع می گوییم.

برای نمایش تابع **f** از مجموعه **A** به مجموعه **B** می نویسیم :

$$\begin{cases} f\ :A\to B \\ y=f\ (x) \end{cases}$$ **A** دامنه تابع **f** است

یک تابع با ضابطه و دامنه آن مشخص می شود،اگر دامنه تابع ذکر نشود ، بزرگترین دامنه ممکن را برای آن تابع در نظر می گیریم.

مثال:

کدام یک از روابط تعریف شده ی زیر تابع می باشد؟

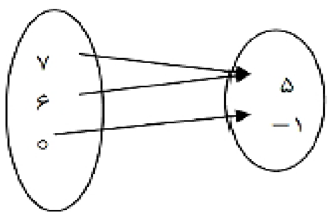
۱) تابع ....

زیرا.............................

x	۳	۲	-۱	۴
y	-۱	۷	$\sqrt{۴}$	۷

۲) تابع ....

زیرا...............................

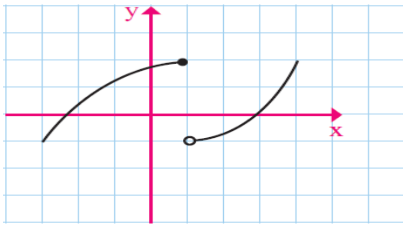


۳) تابع .... $f=\{(2,1),(3,1),(5,7)\}$

زیرا.................................

۴) تابع ....

زیرا........................

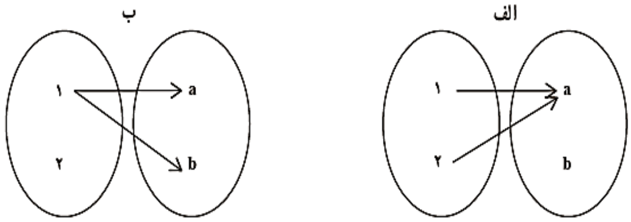


۵) رابطه ی که به هر شخص ، شماره ملی او را نسبت می دهد.

تابع .... زیرا...

(تمرین ۱ و۲ص ۲۴)

① کدام یک از رابطه های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده اند، تابع نیست؟ چرا؟

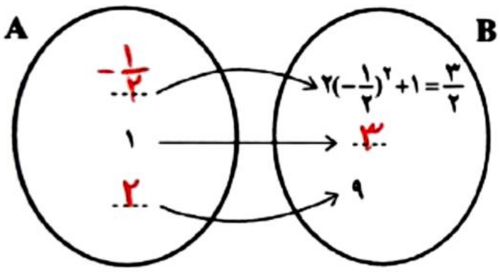


(فعالیت ص ۲۲)

اگر $A=\{-\frac{1}{2},1,2\}$ و $\begin{cases} f: A\to B \\ f(x)=2x^2+1 \end{cases}$ باشد در این صورت این تابع را به صورت پیکانی، زوج مرتبی و مختصاتی نمایش دهید.

☑حل:

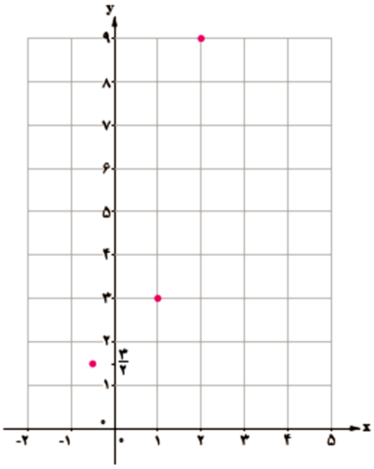
الف)نمایش پیکانی:



ب) نمایش زوج مرتبی:

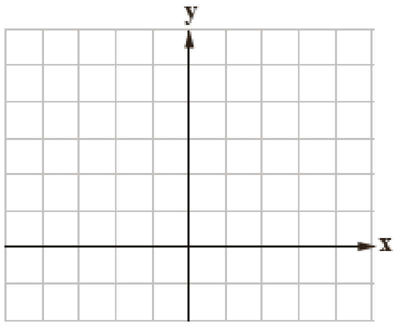
$$f=\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right),(1,3),(2,9)\right\}$$

ج) نمایش مختصاتی:

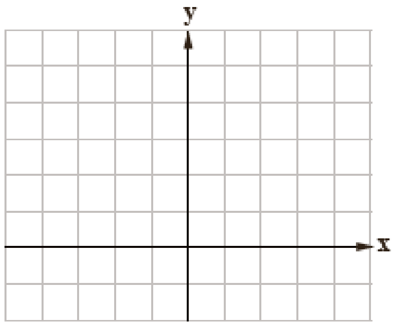


② کامل کنید:

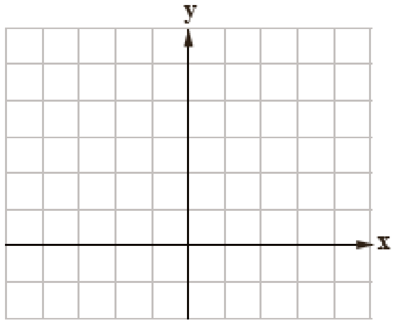
$\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=x^2-1 \end{cases}$ $\quad D_f=A=\{2,-1,-2\}$ $\quad R_f=\{\qquad\}$



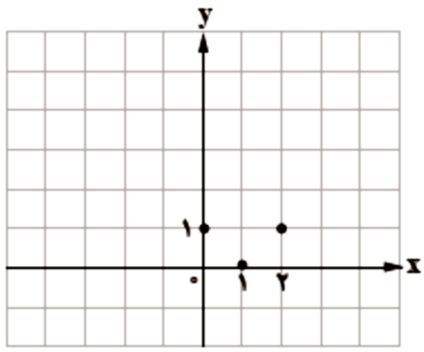
$\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)= \end{cases}$ $\quad D_f=\left\{-\frac{1}{2},0,2\right\}$ $\quad R_f=\left\{-\frac{3}{2},0,6\right\}$



$$\begin{cases} f:\mathrm{A}\to \mathrm{B} \\ f(x)=\dfrac{۱}{x} \end{cases} \qquad D_f=\{\qquad\} \qquad R_f=\left\{۱,\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۱}{۵}\right\}$$



$$\begin{cases} f:\mathrm{A}\to \mathrm{B} \\ f(x)=(x-۱)^۲ \end{cases} \qquad D_f=\{\qquad\} \qquad R_f=\{\qquad\}$$



انواع توابع:

۱)چند جمله ای — ۲) ثابت
۳)چند ضابطه ای — ۴) همانی
۵) پله ای — ۶) علامت
۷) جزء صحیح — ۸) قدر مطلق

با توابع چند جمله ای (درجه ۱ و۲)در سال دهم آشنا شده اید.

توابع ثابت:

تابعی مانند **f** را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم.

✓ نکته:دامنه تابع ثابت R و برد آن مجموعه تک عضوی $\{c\}$ می باشد $(c\in R)$

۱)درنمایش جبری، به صورت $f(x)=c$ می‌باشد.مثل:

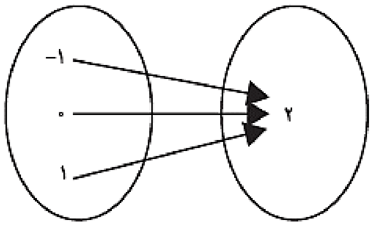
$f(x)=۵$

(تمرین ۲ص ۳۲)

② ج)آیا گزاره " اگر f یک تابع ثابت باشد ،آنگاه $f(kx)=kf(x)$ درست است؟

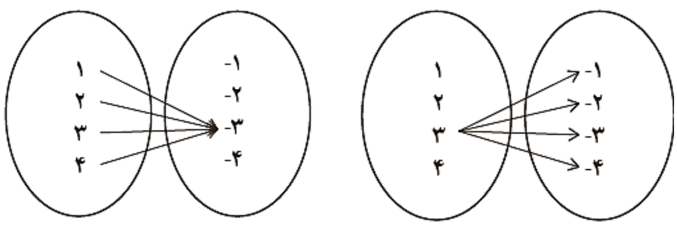
☑حل: خیر زیرا: $f(x)=c\to f(kx)=c$

۲)در نمایش پیکانی، همه پیکانها به یک عضو از مجموعه دوم وارد می شوند.مثل:



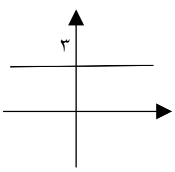
(تمرین ۵ص ۳۲)

⑤ کدام یک از نمایش های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می کند؟



۳)در نمایش مختصاتی ،نمودار تابع، خطی افقی و موازی محور x ها (یا قسمتی از آن) است.

مثل:



۴) درنمایش زوج مرتبی، مؤلفه‌های دوم برابر می‌باشند. مثل :

$$f=\{(۱,۲),(۰,۲),(-۳,۲)\}$$

(تمرین ۳و۶و۴و۹ص ۳۲)

③ اگر $f=\{(۲,b),(a,۴),(۷,a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد مقدار a را حساب کنید

☑حل: f تابع ثابت است پس باید مولفه های دوم برابر باشند:

$b=۴,\ a+b=۴\to a=۰$

④ اگر $A=\left\{\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\left(x_3,y_3\right)\right\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر y_1,y_2,y_3 را به دست آورید.

⑥ در تابع ثابت $f(x)=c$:

الف)مقادیر $f(a),f(b),f(a+b)$ را مشخص کنید

ب) اگر در این تابع $f(a+b)=f(a)\times f(b)$ باشد c چه مقادیری را اختیار می کند؟

⑨ اگر **f** یک تابع ثابت با دامنه ی دو عضوی و $m,n\in N$ باشد، مقدار $m+t$ را به دست آورید.

$$f=\left\{\left(-1,n^2-2n\right),(m-4,3),(m+n,t)\right\}$$

☑حل: f تابع ثابت است پس باید مولفه های دوم برابر باشند:

$$t=3$$

$$n^2-2n=3\rightarrow n^2-2n-3=0\rightarrow$$

$$(n-3)(n+1)=0\rightarrow\begin{cases}n=3\\ n=-1\notin N\ \times\end{cases}$$

$$n=3\ ,\ t=3\rightarrow$$

$$f=\{(-1,3),(m-4,3),(m+3,3)\}$$

چون دامنه دوعضوی است، پس دو زوج مرتب باهم برابرند.

$$\begin{cases}m+3=-1\rightarrow m=-4\notin N\ \times\\ m-4=-1\rightarrow m=3\end{cases}$$

$$\rightarrow m+t=3+3=6$$

توابع چند ضابطه ای (چند قطعه ای):

توابعی که در بخش های مختلف دامنه، ضابطه های مختلف دارند، توابع چند ضابطه ای نامیده می شوند.مثل:

الف) تابع دو ضابطه ای
$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

ب) تابع سه ضابطه ای
$$g(x)=\begin{cases}-2x+3 & x>2\\ 1 & 0\leq x\leq 2\\ x & x<0\end{cases}$$

✓ نکته۱:رابطه چند ضابطه‌ای زمانی تابع هستند که دامنه‌های آن‌ها اشتراک نداشته باشد. اما اگر دامنه‌ها اشتراک داشته باشند، مقدار y آن‌ها در نقاط اشتراک ،یکسان باشد.

نکته ۲: برای به دست آوردن مقادیر تابع ، به دامنه (x) های هر ضابطه توجه می کنیم.

(تمرین ۱۱ص ۳۳)

۱۱) در تابع
$$f(x)=\begin{cases}x & x<-1\\ x^2 & -1\leq x\leq 2\\ 5 & x>2\end{cases}$$
حاصل عبارت های خواسته شده را بیابید.

☑حل:

$$1)\ f(2)\xrightarrow{f(x)=x^2}2^2=4$$

$$2)\ f(3)+f(-1)\rightarrow 5+1=6$$

$$f(3)\xrightarrow{f(x)=5}5$$

$$f(-1)\xrightarrow{f(x)=x^2}(-1)^2=1$$

$$3)\ f\left(-\sqrt{2}\right)+f\left(\sqrt{3}\right)=-\sqrt{2}+3$$

$$f\left(-\sqrt{2}\right)\xrightarrow{f(x)=x}-\sqrt{2}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)\xrightarrow{f(x)=x^2}\left(\sqrt{3}\right)^2=3$$

$$۴)\, f\left(\sqrt{۲}\right)+f\left(۵\right)=۲+۵=۷$$

$$f\left(\sqrt{۲}\right)\xrightarrow{f(x)=x^{۲}}\left(\sqrt{۲}\right)^{۲}=۲$$

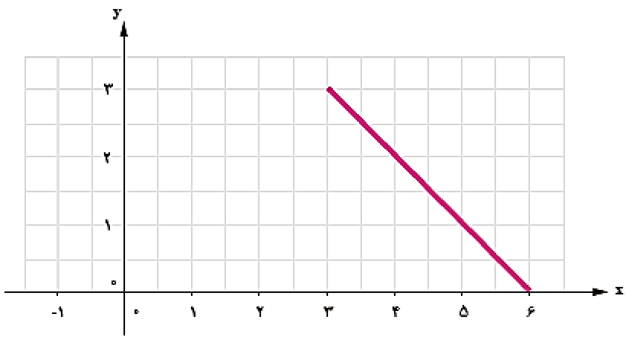
$$f\left(۵\right)\xrightarrow{f(x)=۵}۵$$

نکته ۳: برای رسم نمودار تابع چند ضابطه ای، نمودار هرکدام از ضابطه ها را با توجه به محدوده ای که ضابطه آن تعریف شده است ، رسم می کنیم.

(کاردرکلاس ص۲۹)

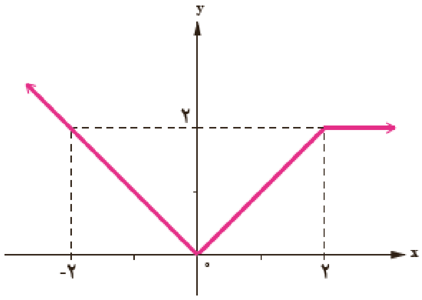
ضابطه تابع ونمودار آن را کامل کنید:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x+۱ & -۱\le x<۳\\ \ldots\ldots\ldots & ۳\le x\le ۶\end{cases}$$



(تمرین ۱۰ص ۳۲)

ضابطه تابع را مشخص کنید.

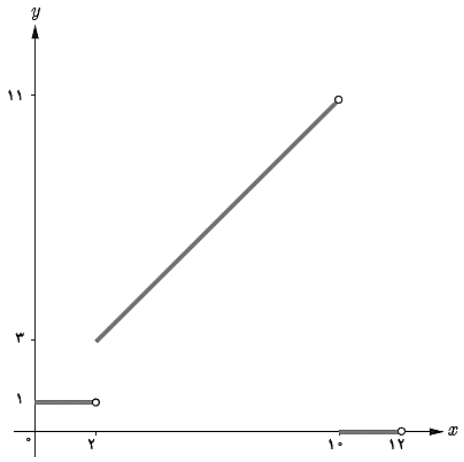


(تمرین ۱۳ص ۳۳)

تابع زیر را رسم کنید.

$$C(x)=\begin{cases}۱ & ۰\le x<۲\\ x+۱ & ۲\le x<۱۰\\ ۰ & ۱۰\le x\le ۱۲\end{cases}$$

☑حل:



تابع همانی:

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنه تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.

- ✓ نکته:دامنه و برد تابع همانی R می باشد

(تمرین ۲ص ۳۲)

② الف)آیا گزاره "اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند آن تابع همانی است"درست است.

☑حل: خیر. مثلا تابع زیر با اینکه دامنه و برد برابر است ولی همانی نیست.

$$D = R = \{۱,۲\}$$
$$f = \{(۱,۲),(۲,۱)\}$$

۱)درنمایش جبری، به صورت $f\left(x\right)=x$ می‌باشد.مثل:

$$f\left(-۱\right)=-۱$$

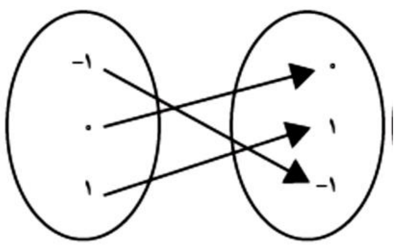
(تمرین ۲ص ۳۲)

ب) آیا گزاره "اگر دامنه‌ی یک تابع همانی، مجموعه اعداد حقیقی باشد. آنگاه حاصل $f\left(x\right)+f\left(-x\right)$ برابر صفر است"درست است؟

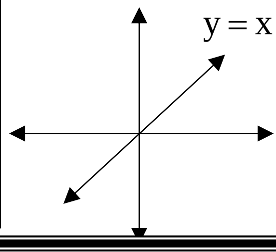
☑حل: درست.زیرا:

$$\begin{cases} f(x)=x \\ f(-x)=-x \end{cases} \rightarrow f(x)+f(-x)=x+(-x)=۰$$

۲)در نمایش پیکانی، اعدادسروته پیکان باهم برابرند.مثل:



۳)در نمایش مختصاتی ،نمودار تابع، نمودار تابع، نیمساز ربع اول و سوم ویا قسمتی ازآن است. مثل: $y=x$



(تمرین ۸ص ۳۲)

⑧ الف) در زوج مرتب $\left(۲\ ,n^{۲}-۳n+۴\right)$ مقدار $n \in N$ را طوری بیابید که این زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد

☑حل:

$$n^{۲}-۳n+۴=۲ \Rightarrow n^{۲}-۳n+۲=۰ \Rightarrow$$
$$(n-۲)(n-۱)=۰ \rightarrow n=۲\ ,\ n=۱$$

ب)در زوج مرتب $\left(-۱\ ,n^{۲}-۴n+۲\right)$ مقدار $n \in N$ را طوری بیابید که این زوج مرتب روی نیمساز ناحیه اول و سوم باشد

۴) درنمایش زوج مرتبی، مولفه اول، هر زوج مرتب یکسان است. مثل : $f=\left\{\left(۱,۱\right),\left(۰,۰\right),\left(-۳,-۳\right)\right\}$

(تمرین ۷ص ۳۲)

⑦ اگر $A=\left\{\left(a,۱\right),\left(b,۲\right),\left(c,۵\right)\right\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a, b, c رابیابید.

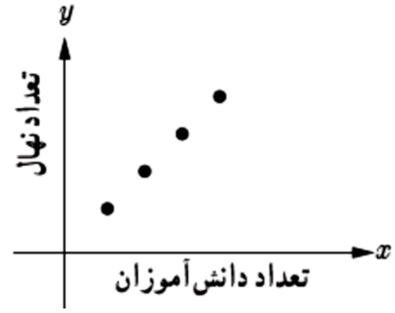
(تمرین۱ص۳۱)

①برای هر تابع زیر، یک ضابطهٔ مناسب نوشته و نمودار آن را رسم کنید .سپس مشخص کنید که کدام یک از آن ثابت، همانی یا چند ضابطه ای است.

الف) به مناسبت روز درختکاری در یک مدرسه هر دانش آموز یک نهال می کارد.

☑حل:

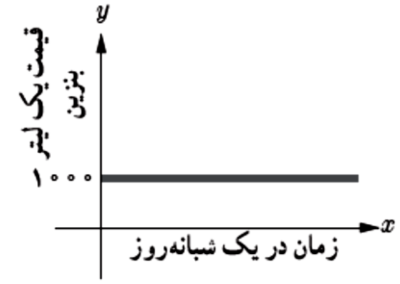
تابع همانی $f(x)=x \quad , \quad x\in N$



ب) هزینهٔ یک لیتر بنزین معمولی در هر ساعت شبانه روز ۱۰۰۰تومان است.

☑حل:

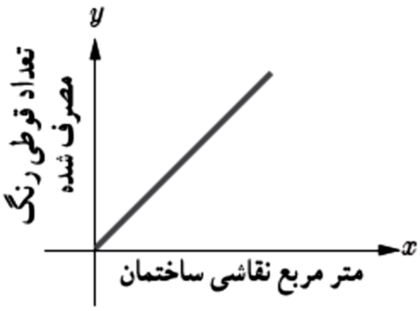
تابع ثابت $f(x)=۱۰۰۰ \quad , \quad x\geq ۰$



ج)برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان،یک قوطی رنگ کوچک استفاده می شود.

☑حل:

تابع همانی $f(x)=x \quad , \quad x\in R$

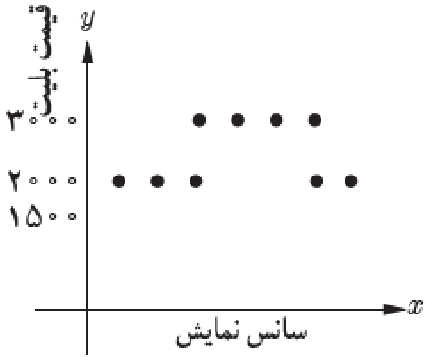


د) بلیط یک سینما در ۳ سانس اول۲۰۰۰تومان و در۴ سانس بعدی ۳۰۰۰تومان ودردو سانس آخر ۱۵۰۰تومان است.

☑حل:

تابع چندضابطه‌ای

$$f(x)=\begin{cases} ۲۰۰۰ & x=۱,۲,۳ \\ ۳۰۰۰ & x=۴,۵,۶,۷ \\ ۱۵۰۰ & x=۸,۹ \end{cases}$$



فصل ۲ درس ۲: توابع پلکانی و قدر مطلقی

اهداف درس ۲:

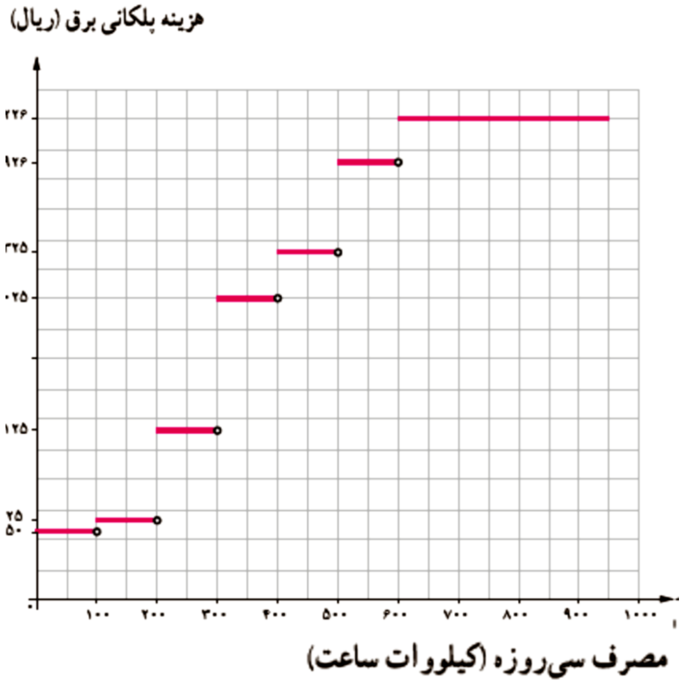
- معرفی تابع پلکانی و شناخت آن در مسائل واقعی؛
- مفهوم سطح زیر نمودار یک تابع با توجه به متغیر مستقل و وابسته؛
- معرفی تابع جزء صحیح و رسم آن؛
- معرفی تابع قدرمطلق و کاربرد آن برای توصیف و تحلیل دقیق و علمی مسائل پیرامون؛
- تبدیل تابع قدر مطلق به دو ضابطه و برعکس؛
- مدل سازی مسائل واقعی به کمک تابع پلکانی و تابع قدرمطلق؛
- رسم نمودار توابع قدرمطلق.

توابع پلکانی:

هر تابع چند ضابطه ای که همه ضابطه هایش عدد ثابت باشند،تابع پلکانی می نامیم.مثل:

$$f(x)=\begin{cases} 2 & x<1 \\ 3 & x\geq 1 \end{cases}$$

نمودار توابع پلکانی فقط شامل خطوط افقی است چون تمام ضابطه های آن عدد ثابت است.مثل نمودار هزینه برق مصرفی خانه در سی روز



(تمرین ۳ص۴۳)

③ جدول مالیاتی زیر را، که توسط هیئت مدیره یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید:

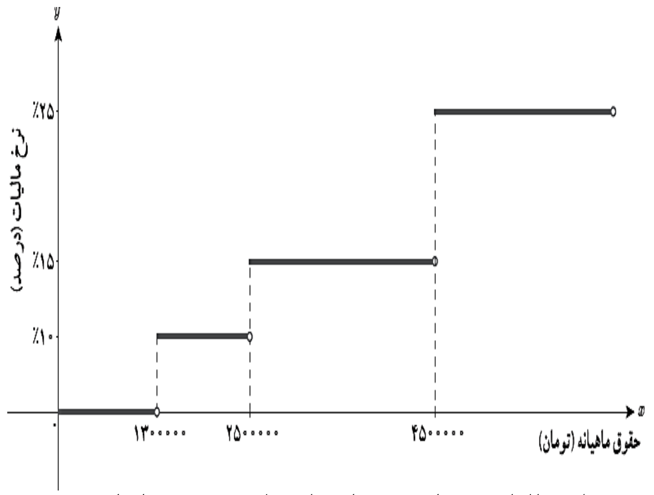
الف) نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

ب) به کمک نمودار پلکانی و محاسبه سطح متناظر با هر یک از حقوق های ماهیانه، مبلغ مالیات هر یک از کارمندان زیر را محاسبه کنید:

- کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱،۵۰۰،۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱،۳۰۰،۰۰۰ تا ۲،۵۰۰،۰۰۰	۱۰
مازاد بر ۲،۵۰۰،۰۰۰ تا ٤،۵۰۰،۰۰۰	۱۵
مازاد بر ٤،۵۰۰،۰۰۰	۲۵

☑حل: الف)



ب) مبلغ مالیات پرداختی برابر با سطح زیر نمودار است.

کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان ، معاف از مالیات

کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان

۲۴۰۰۰۰۰ − ۱۳۰۰۰۰۰ = ۱۱۰۰۰۰۰

۱۱۰۰۰۰۰ × $\frac{۱۰}{۱۰۰}$ = ۱۱۰۰۰۰ تومان

کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

$$(۲۵۰۰۰۰۰-۱۳۰۰۰۰۰)\times\frac{۱۰}{۱۰۰}+$$
$$(۴۵۰۰۰۰۰-۲۵۰۰۰۰۰)\times\frac{۱۵}{۱۰۰}+$$
$$(۶۰۰۰۰۰۰-۴۵۰۰۰۰۰)\times\frac{۲۵}{۱۰۰}$$
$$=۱۲۰۰۰۰+۳۰۰۰۰۰+۳۷۵۰۰۰=۷۹۵۰۰۰ \text{ تومان}$$

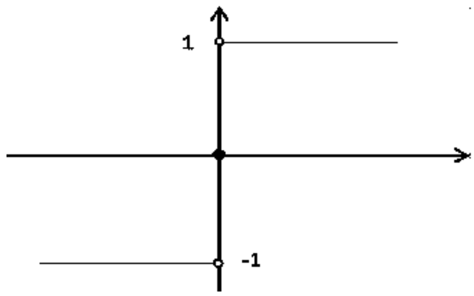
تابع علامت:

(کاردرکلاس ص۳۵)

تابع پلکانی که ضابطه آن به صورت زیر باشد را تابع علامت می نامیم و آن را با $y = sign(x)$ نشان می دهیم.

دامنه تابع علامت R و برد آن $\{-۱,۰,۱\}$ می باشد.

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$



تابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح یا براکت از نوع توابع پله ای است که به صورت $f(x)=[x]$ می باشد که می خوانیم جزءصحیح x یا براکت x. مثل: $f(x)=[۲]$

دامنه و برد توابع جزء صحیح:

تابع جزء صحیح کارش صحیح سازیه و هر عددی که وارد تابع شود جزء صحیح آن عدد را بیرون می دهد.بنابراین:

$$D_f = R$$
$$R_f = Z$$

✓ نکته: جزء صحیح(براکت) هر عدد صحیح، برابر است با خود آن عدد

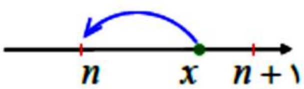
$$\underset{x\in Z}{[x]} = x$$

مثل:

$$[۲]=۲ \qquad , \qquad [-۲]=-۲$$

✓ جزء صحیح(براکت) هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

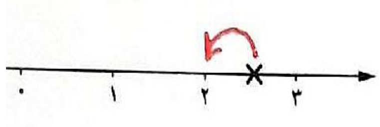
$$\underset{x\notin Z}{[x]} \xrightarrow{n<x<n+۱} n$$



$$n\le x<n+۱\rightarrow[x]=n$$

مثل:

$$[۲/۷]=۲$$



$$[-۰/۷]=-۱$$

✓ راه کوتاه: براکت در اعداد مثبت، اعشار را از بین می بردو در اعداد منفی علاوه بر از بین بردن اعشار ، یک واحد هم کم می کند.

مثل:

$$[۰/۷]=۱ \qquad , \qquad [-۲/۷]=-۲-۱=-۳$$

(کاردرکلاس ص۳۹و تمرین۱ ص۴۳)

حاصل عبارات زیر را بیابید

$[-۰/۰۷]=$ $\qquad$ $[-۳/۲]=$

$[-\pi]=$ $\qquad$ $[-۲/۲]=$

$[\pi]=$ $\qquad$ $[-۱/۲]=$

$[۴/۲]=$ $\qquad$ $[-۴/۲]=$

$[۳/۹۹]=$ $\qquad$ $[-۳/۲]=$

✓ حاصل $\left[x\right]+\left[-x\right]$ اگر عدد x صحیح باشد برابرصفر و اگر x عددی غیر صحیح باشد برابر ۱-است

$$\left[x\right]+\left[-x\right]=\begin{cases}\circ & x\in Z\\ -۱ & x\notin Z\end{cases}$$

(تمرین ۲ص ۴۳)

جدول زیر را کامل کنید

مقدار $f\left(x\right)$	مقدار x	ضابطه تابع
	$x=-۲/۳$	$f\left(x\right)=\left[x\right]$
	$x=۵$	
	$x=۱/۷$	$f\left(x\right)=\left[-x\right]$
	$x=۲/۳$	
	$x=۱$	$f\left(x\right)=\left[x\right]+\left[-x\right]$
	$x=۱/۳$	
	$x=۱/۷$	
	$x=۲$	
	$x=۱$	$f\left(x\right)=\left[۳x\right]$
	$x=۰/۲$	
	$x=۱/۳$	

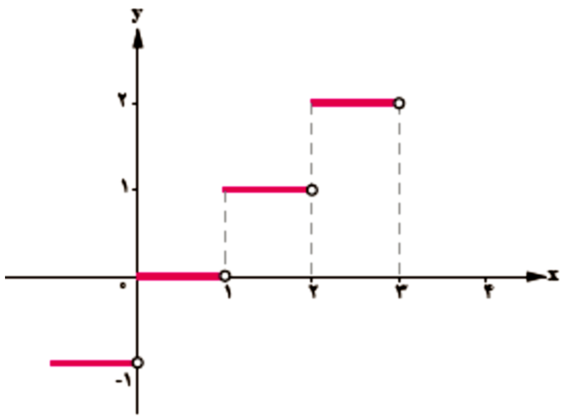
رسم تابع جزء صحیح:

برای رسم تابع جزء صحیح در یک بازه (فاصله)کافی است طول فاصله رابه فاصله هایی به طول یک دسته بندی کنیم

(کاردرکلاس ص ۳۹)

②تابع $g\left(x\right)=\left[x\right]$ درفاصله $-۱\leq x<۳$ را رسم کنید.☑حل:

$$g(x)=\begin{cases}-۱ & -۱\leq x<۰\\ ۰ & ۰\leq x<۱\\ ۱ & ۱\leq x<۲\\ ۲ & ۲\leq x<۳\end{cases}$$



تابع قدر مطلق:

تابعی که هرمقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود، تابع قدر مطلق را به صورت $f\left(x\right)=\left|x\right|$ نمایش می‌دهند.مثل: $f\left(x\right)=\left|۲\right|$

✓ هر عددی که وارد تابع قدر مطلق شود عددی نامنفی بیرون می دهدپس دامنه آن R وبرد آن اعداد حقیقی نامنفی است

✓ قدر مطلق هر عدد مثبت یا صفر، برابر است با خود آن عدد .مثل: $\left|۲\right|=۲$, $\left|\circ\right|=\circ$

✓ قدر مطلق هر عدد منفی، برابر است با قرینه آن عدد .مثل: $\left|-۲\right|=-\left(-۲\right)=۲$

✓ قدر مطلق هر عدد با قدرمطلق قرینه اش برابر است.مثل:

$$\left|x-۲\right|=\left|۲-x\right| \quad , \quad \left|۲\right|=\left|-۲\right|$$

✓ تابع قدرمطلق را مطابق تعریف می توان به صورت تابع دوضابطه ای نوشت:

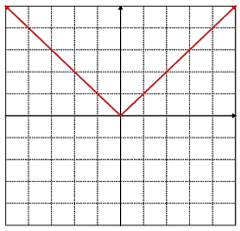
$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

✓ اگر دامنه یک تابع قدر مطلق، مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد نمودار آن به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x)=|x|$$

x	-۱	۰	۱
y	۱	۰	۱

$\rightarrow$



رسم تابع قدر مطلق:

تابع قدرمطلق را می توان به دو روش زیر رسم کرد :

۱.توابع به فرم $y=|ax+b|$ به صورت دوضابطه ای

۲. توابع به فرم $y=|x\pm a|\ ,\ y=|x|\pm b$ به کمک انتقال

مراحل رسم توابع به فرم $y=|ax+b|$ به صورت دوضابطه ای:

۱. ریشه یابی
۲. ضابطه بندی
۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار

(مثال ص ۴۲)

نمودار تابع $y=|۲x-۶|$ را رسم کنید. ☑حل:

۱. ریشه یابی $۲x-۶=۰\rightarrow ۲x=۶\rightarrow x=۳$

۲. ضابطه بندی

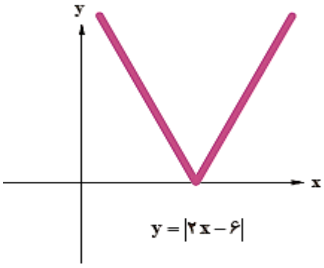
$$y=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & x\geq ۳ \\ -(۲x-۶) & x<۳ \end{cases}$$

۳. جدول نقطه یابی و رسم نمودار

در جدول ابتدا به x عدد ریشه ، سپس نقاط کمکی(یک واحد کمتر و یک واحد بیشتر از ریشه)را دوطرف آن قرار داده و عرض نقاط را می یابیم

x	۲	۳	۴
y	۲	۰	۲

$\rightarrow$



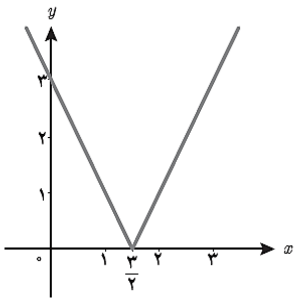
(تمرین ۵ ص ۴۴)

5 الف)نمودار تابع $y=|۲x-۳|$ را رسم کنید.

$$۲x-۳=۰\rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$y=\begin{cases} ۲x-۳ & x\geq \frac{۳}{۲} \\ -(۲x-۳) & x<\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

x	۰	$\frac{۳}{۲}$	۳
y	۳	۰	۲



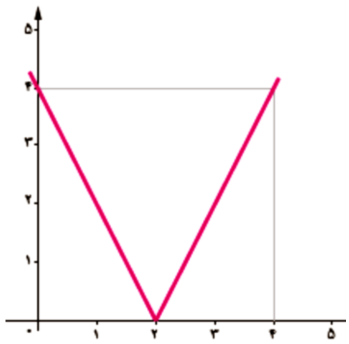
ب)نمودار تابع $y=|۳x+۱|$ را رسم کنید.

مراحل نوشتن ضابطه تابع به فرم $y=\left|ax+b\right|$ از روی نمودار:

ابتدا جدول نقطه یابی را می کشیم سپس معادله هر نیم خط را نوشته و داخل قدر مطلق قرار می دهیم تا ضابطه تابع به دست آید.

(کاردرکلاس ص۴۱)

با توجه به شکل ضابطه تابع را بنویسید.



☑حل:

با توجه به شکل ریشه نمودارو نقاط کمکی آن را می یابیم بنابراین:

x	۰	۲	۴
y	۴	۰	۴

از طریق جدول نقاط معادله هر نیم خط را می نویسیم:

$$\left(۲,۰\right),\left(۰,۴\right)\to y=m\left(x-x_۱\right)\xrightarrow{m=-۲}y=-۲x+۴$$

$$\left(۲,۰\right),\left(۴,۴\right)\to y=m\left(x-x_۱\right)\xrightarrow{m=۲}y=۲x-۴$$

معادله نیم خط هارا داخل قدر مطلق قرار می دهیم و ضابطه را می یابیم:

$$\left.\begin{matrix}۲x-۴ & x\geq ۲\\ -۲x+۴ & x<۲\end{matrix}\right\}\to y=\left|۲x-۴\right|$$

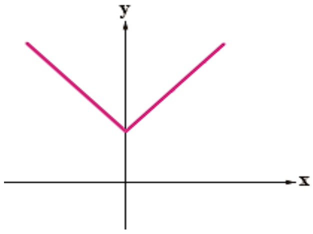
رسم توابع به فرم $y=\left|x\right|\pm b$, $y=\left|x\pm a\right|$ به کمک انتقال:

✓ در تابع به فرم $y=\left|x\right|\pm b$ انتقال به صورت آسانسوری(عمودی) است

(کاردرکلاس ص۴۲ و مثال)

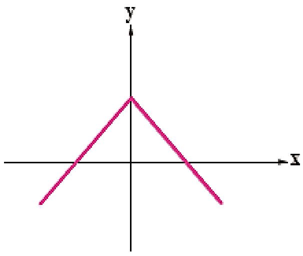
۱.نمودار تابع $y=\left|x\right|+۱$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y=\left|x\right|$ را ۱واحد به بالا منتقل می کنیم



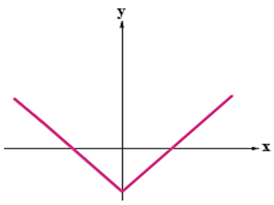
۲.نمودار تابع $y=-\left|x\right|+۱$ را رسم کنید.

☑حل:ابتدا نمودار $y=\left|x\right|$ را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم سپس نمودار $y=-\left|x\right|$ را ۱واحدبه بالا منتقل می کنیم



۳.نمودار تابع $y=\left|x\right|-۳$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y=\left|x\right|$ را۳واحد به پایین منتقل می کنیم

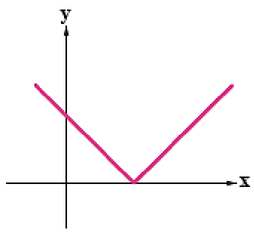


✓ در تابع به فرم $y=\left|x\pm a\right|$ انتقال به صورت قطاری (افقی)است

(کاردرکلاس ص۴۲)

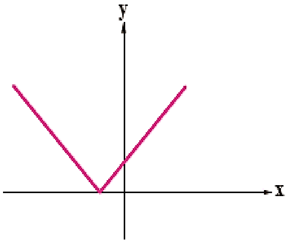
۱.نمودار تابع $y=\left|x-۴\right|$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y=\left|x\right|$ را۴واحد به راست منتقل می کنیم



۲.نمودار تابع $y = |x + ۱|$ را رسم کنید.

☑حل: نمودار $y = |x|$ را۱واحد به چپ منتقل می کنیم



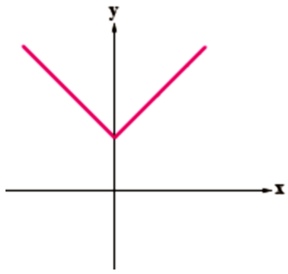
۳.نمودار تابع $y = |x - ۳|$ را رسم کنید.

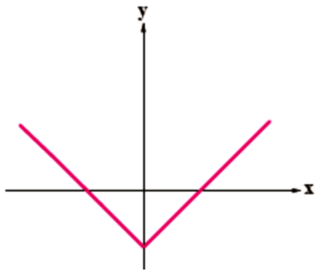
(تمرین ۴ ص۴۴)

با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می کند؟

الف) $y = |x| + ۲$

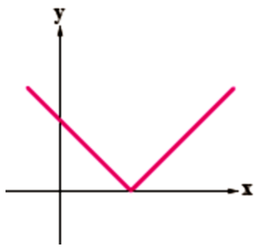
ب) $y = |x| - ۳$

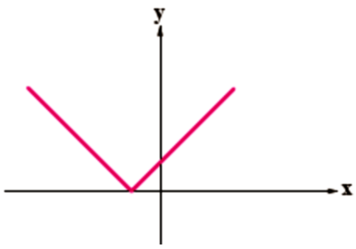




الف) $y = |x + ۱|$

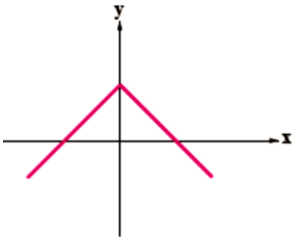
ب) $y = |x - ۴|$

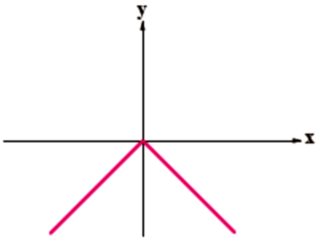




الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + ۱$





فصل ۲ درس ۳: اعمال بر روی توابع

اهداف درس ۳:

- آشنایی با تعیین دامنه در اعمال میان توابع؛
- آشنایی با اعمال میان توابع به کمک ضابطه توابع؛
- آشنایی با اعمال میان توابع به کمک زوج مرتب ها و رسم نمودار آنها؛

اعمال جبری روی توابع (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم):

اگر f,g به ترتیب دو تابع با دامنه های D_f , D_g باشند، در این صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به صورت زیر تعریف می کنیم.

دامنه	ضابطه	تابع
$D_f \cap D_g$	$(f+g)(x)$	$f+g$
$D_f \cap D_g$	$(f-g)(x)$	$f-g$
$D_f \cap D_g$	$(f\times g)(x)$	$f\times g$
$D_f \cap D_g - \{x / g(x)=۰\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{f}{g}$

- ✓ نکته:همواره دامنه را قبل از ساده کردن ضابطه آن محاسبه می کنیم
- ✓ جمع وتفریق دو تابع خطی،تابعی خطی است
- ✓ ضرب دو تابع خطی،تابعی سهمی است
- ✓ تقسیم دو تابع خطی،تابعی گویا است

۱)اعمال جبری روی نمایش جبری توابع:

(فعالیت ص ۴۹ و کاردر کلاس ص ۵۰)

اگر $f(x)=x^۲-۱$ و $g(x)=x+۱$ باشدضابطه توابع

$$(f+g),(f-g),(g-f),(f\times g),\left(\frac{f}{g}\right),\left(\frac{g}{f}\right)$$

را به دست آورید.

☑حل:

$$\left.\begin{array}{l} D_f = R \\ D_g = R \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} R$$

$$D_{f+g} = R$$
$$f+g = x^۲-۱-x-۱ = x^۲-x-۲$$

$$D_{f-g} = R$$
$$f-g = x^۲-۱-x-۱ = x^۲-x-۲$$

$$D_{g-f} = R$$
$$g-f = x+۱-x^۲+۱ = -x^۲+x+۲$$

$$D_{f\times g} = R$$
$$f\times g = (x^۲-۱)\times(x+۱) = x^۳+x^۲-x-۱$$

$$D_{\frac{f}{g}} = R-\{-۱\}$$
$$\frac{f}{g} = \frac{x^۲-۱}{x+۱} = \frac{(x+۱)(x-۱)}{x+۱} = x-۱$$
$$\downarrow$$
$$x+۱=۰ \to x=-۱$$

$$D_{\frac{g}{f}} = R-\{\pm۱\}$$
$$\frac{g}{f} = \frac{x+۱}{x^۲-۱} = \frac{x+۱}{(x+۱)(x-۱)} = \frac{۱}{x-۱}$$
$$\downarrow$$
$$x^۲-۱=۰ \to x^۲=۱ \to x=\pm۱$$

① برای دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=x-۱$

جدول داده شده ی زیر را کامل کنید.

دامنه	ضابطه	تابع
		$f+g$
		$\bullet(f+g)(۲)$
		$f-g$
		$f\times g$
		$\dfrac{f}{g}$

- برای به دست آوردن مقدار تابع ابتدا در ضابطه تابع f,g به جای x مقدار مورد نظر را نوشته و حاصل را می یابیم سپس اعمال جبری بر روی توابع را محاسبه می کنیم

۲)اعمال جبری روی زوج مرتب توابع: (مثال ص۴۸)

دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

$$f=\{(۱,۲),(-۳,۴),(۳,۵)\ (۷,-۱)\}$$

$$g=\{(۲,۱),(۳,-۱),\ (۷,۲)\}$$

☑حل: ابتدا دامنه هر تابع سپس اشتراک آنها را نوشته و اعمال جبری را روی مولفه دوم (y) انجام می دهیم

$$\left.\begin{matrix}D_f=\{۱,-۳,۳,۷\}\\ D_g=\{۲,۳,۷\}\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\cap}\{۳,۷\}$$

$$D_{f+g}=\{۳,۷\}$$

$$f+g=\left\{\left(۳,\underbrace{۵+(-۱)}_{۴}\right),\left(۷,\underset{۱}{-۱+۲}\right)\right\}$$

$$D_{f-g}=\{۳,۷\}$$

$$f-g=\left\{\left(۳,\underbrace{۵-(-۱)}_{۶}\right),\left(۷,\underset{-۳}{-۱-۲}\right)\right\}$$

$$D_{g-f}=\{۳,۷\}$$

$$g-f=\left\{\left(۳,\underset{-۶}{-۱-۵}\right),\left(۷,\underbrace{۲-(-۱)}_{۳}\right)\right\}$$

$$D_{f\times g}=\{۳,۷\}$$

$$f\times g=\left\{\left(۳,\underbrace{۵\times(-۱)}_{-۵}\right),\left(۷,\underset{-۲}{-۱\times ۲}\right)\right\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\{۳,۷\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(۳,\underset{-۵}{\frac{۵}{-۱}}\right),\left(۷,\frac{-۱}{۲}\right)\right\}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\{۳,۷\}$$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(۳,\frac{-۱}{۵}\right),\left(۷,\underset{-۲}{\frac{۲}{-۱}}\right)\right\}$$

(کاردرکلاس ص۵۰)

دامنه و ضابطه حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

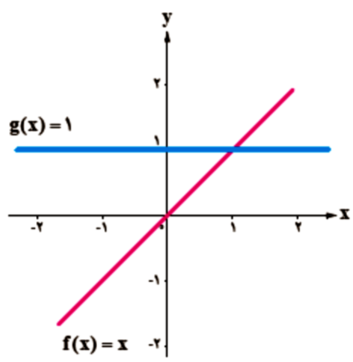
$$f=\{(2,0),(4,-1),(-1,3)\}$$

$$g=\{(2,5),(3,-1),\ (-1,2)\}$$

۳)اعمال جبری روی نمودار توابع:

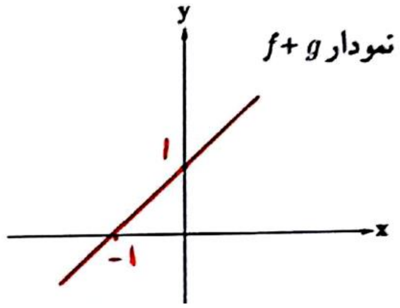
(فعالیت ص ۵۱)

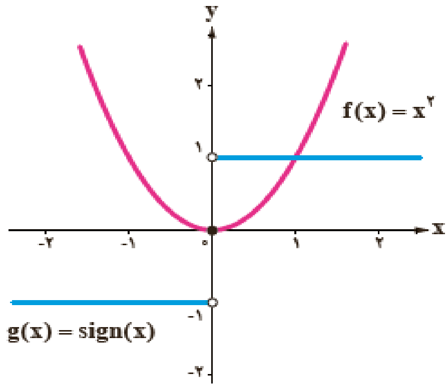
با توجه به نمودار توابع $f\,,g$ نمودار تابع $f+g$ را رسم کنید.



☑حل:

$$f+g=x+1\to\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1\\ \hline y & 1 & 0\end{array}$$

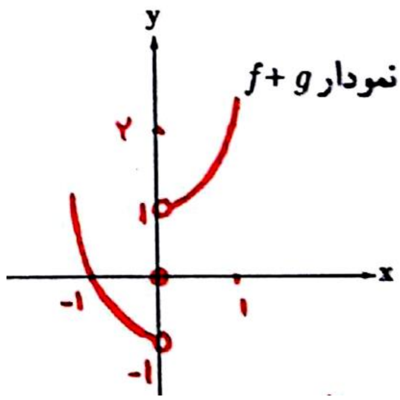




☑حل:

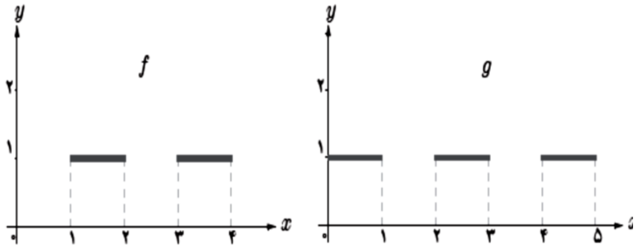
$$f+g=x^2+\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$\to\begin{cases}x^2+1 & x>0\to\begin{array}{c|cc} x & 0 & 1\\ \hline y & 1 & 2\end{array}\\[2ex] x^2 & x=0\to(0,0)\\[2ex] x^2-1 & x<0\to\begin{array}{c|cc} x & 0 & -1\\ \hline y & -1 & 0\end{array}\end{cases}$$

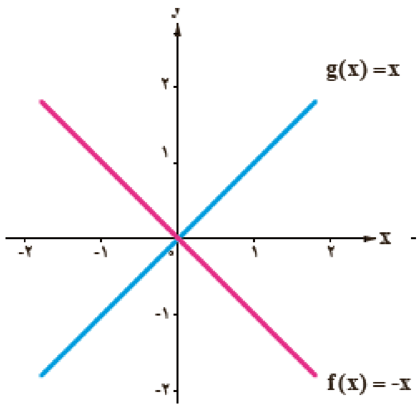


(تمرین ۱و۲و۵ص ۵۲و۵۵)

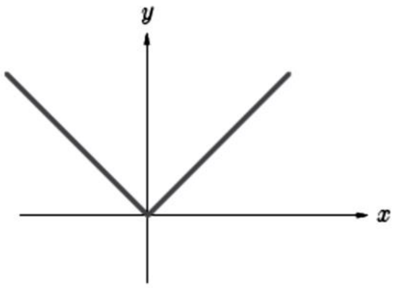
با توجه به نمودارتوابع $f\,,g$ نمودار تابع خواسته شده را رسم کنید. الف)



$f+g=$



$f+g=$



$$f(x)=|x|\ ,\ g(x)=|x|$$

$f\times g=$

$\dfrac{f}{g}=$

(تمرین۴ص ۵۳)

④اگر $f\left(x\right)=x^{2}$ و تابع $\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(x\right)$ به صورت نمودار زیر باشد،ضابطه تابع $g\left(x\right)$ را به دست آورید.