

۱- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 2^{3n-2} = \frac{1}{32^2}$$

$$\text{پ) } 4^{3x+2} = \frac{1}{64^3}$$

$$\text{ث) } \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 2^{3n-2} = \frac{1}{32^2} = 2^{-10} \Rightarrow 3n-2 = -10 \Rightarrow n = -\frac{8}{3}$$

$$\text{ب) } 9^{3y-3} = 27^{y+1} \Rightarrow 3^{6y-6} = 3^{3y+3} \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{پ) } 4^{3x+2} = \frac{1}{64^3} \Rightarrow 2^{6x+4} - 18 = 2$$

$$6x = -22 \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$$

$$\text{ت) } 9^x = 3^{x^2-4x} = 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow x^2 - 4x - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 6$$

$$\text{ث) } \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

۲- فرض کنیم  $f(x) = 3^x$ ،  $g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$  و  $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف)  $f(3)$

ب)  $g(-1)$

پ)  $h(-2)$

« پاسخ »

الف)  $f(3) = 3^3 = 27$

ب)  $g(-1) = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$

پ)  $h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

۳- کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطه‌ی  $(\frac{1}{5}, \sqrt{5})$  روی نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = 5^x$  قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = 10^x$  با محور  $y$ ها، نقطه‌ی  $(0, 10)$  است.

پ) دامنه‌ی توابع با ضابطه‌های  $y = 2^x$  و  $y = x^2$  مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = 6x$  با محور  $x$ ها، نقطه‌ی  $(6, 0)$  است.

« پاسخ »

الف) درست      ب) نادرست      پ) درست      ت) نادرست

۴- کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف)  $y = 2x^2 - 3x + 1$       ب)  $y = x^3$

پ)  $y = (0/1)^x$       ت)  $y = (\frac{3}{2})^x$

ث)  $y - 3x = 2$       ج)  $y = \sqrt{x-1}$

« پاسخ »

الف)  $y = 2x^2 - 3x + 1$  (نادرست)

ب)  $y = x^3$  (نادرست)

پ)  $y = (0/1)^x$  (درست)

ت)  $y = (\frac{3}{2})^x$  (درست)

ث)  $y - 3x = 2$  (نادرست)

ج)  $y = \sqrt{x-1}$  (نادرست)

۵- هریک از معادله‌های نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $2^{2x+1} = 32$

ب)  $9^{x^2+2} = (\frac{1}{27})^{2x}$

« پاسخ »

الف)  $2^{2x+1} = 32 \Rightarrow 2^{2x+1} = 2^5 \Rightarrow 2x+1 = 5 \Rightarrow x = 2$

ب)  $9^{x^2+2} = (\frac{1}{27})^{2x} \Rightarrow (3^2)^{x^2+2} = (3^{-3})^{2x} \Rightarrow 3^{2x^2+4} = 3^{-6x} \Rightarrow 2x^2 + 4 = -6x$

$2x^2 + 6x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

۶- از تساوی‌های  $2^{x+2y} = \frac{1}{32}$  و  $2^{x-2y} = 8$  نتیجه می‌شود که  $x + y$  برابر با ..... می‌باشد.

« پاسخ »

$$\begin{cases} 2^{x+2y} = 2^{-5} \\ 2^{x-2y} = 2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = -5 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x + y = -3$$

۷- هر یک از نامعادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $2^{2n-6} > 16$

ب)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{7}\right)^{7+x}$

« پاسخ »

الف)  $2^{2n-6} > 2^4 \Rightarrow 2n - 6 > 4 \Rightarrow 2n > 10 \Rightarrow n > 5$

ب)  $\left(\frac{1}{7}\right)^{5-x} < \left(\frac{1}{7}\right)^{7+x} \Rightarrow 5 - x > 7 + x \Rightarrow -2x > 2 \Rightarrow x < -1$

۸- معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف)  $27^{4+4n} = 81^{2n+8}$

ب)  $2^{x^2-x+2} = 128^{x-2}$

« پاسخ »

الف)  $27^{4+4n} = 81^{2n+8} \Rightarrow (3^3)^{4+4n} = (3^4)^{2n+8} \Rightarrow 3^{12+12n} = 3^{8n+32} \Rightarrow 12+12n = 8n+32 \Rightarrow 4n = 20 \Rightarrow n = 5$

ب)  $2^{x^2-x+2} = (2^7)^{x-2} \Rightarrow 2^{x^2-x+2} = 2^{7x-14} \Rightarrow x^2 - x + 2 = 7x - 14 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (x-4)^2 = 0 \Rightarrow x = 4$

۹- فرض کنید تابع  $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 125$  محورهای  $x$  و  $y$  را به ترتیب در نقاط  $A(a, 0)$  و  $B(0, b)$  قطع می‌کند. مقادیر  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\xrightarrow[\text{محور } x \text{ ها را قطع کند}]{y = 0} 0 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 125 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 125 \Rightarrow 5^{-x+1} = 5^3$$

$$\Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, 0) \Rightarrow a = -2$$

$$\xrightarrow[\text{محور } y \text{ ها را قطع کند}]{x = 0} y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 125 = 5 - 125 \Rightarrow y = -120 \Rightarrow B(0, -120) \Rightarrow b = -120$$

۱۰- در تابع  $f(x) = a^x + b$  اگر  $f(0) = 6$  و  $f(5) = 37$  باشد  $f(-2)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f(0) = 6 \Rightarrow a^0 + b = 6 \Rightarrow 1 + b = 6 \Rightarrow b = 5$$

$$f(5) = 37 \Rightarrow a^5 + 5 = 37 \Rightarrow a^5 = 32 \Rightarrow a^5 = 2^5 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2^x + 5 \Rightarrow f(-2) = 2^{-2} + 5 = \frac{1}{4} + 5 = \frac{21}{4}$$

۱۱- معادله‌ی  $3^x + 6^x = 10 \times 9^{x-1}$  را حل کنید.

« پاسخ »

$$3^x + 6^x = 10 \times 9^{x-1} \Rightarrow 9 \times 3^x + 9 \times 6^x - 10 \times 9^x = 0$$

$$\Rightarrow (3 \times 3^x + 5 \times 3^x)(3 \times 2^x - 2 \times 3^x) = 0$$

$$3 \times 3^x = 2 \times 3^x \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 1$$

می‌دانیم  $(3 \times 2^x + 5 \times 3^x)$  همواره مثبت است، پس:

۱۲- هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } 3^{x^2+2x} \leq 243^{x+2}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{5}\right)^{1-7x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21}$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 3^{x^2+2x} \leq 3^{5x+10} \Rightarrow x^2+2x \leq 5x+10 \Rightarrow x^2-3x-10 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{5}\right)^{1-7x} > \left(\frac{1}{5}\right)^{4x-21} \Rightarrow 1-7x < 4x-21 \Rightarrow -11x < -22 \Rightarrow x > 2$$

۱۳- اگر  $f(x) = 27^x - 3$  باشد،  $f\left(\frac{2}{3}\right)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = 27^{\frac{2}{3}} - 3 = (3^3)^{\frac{2}{3}} - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

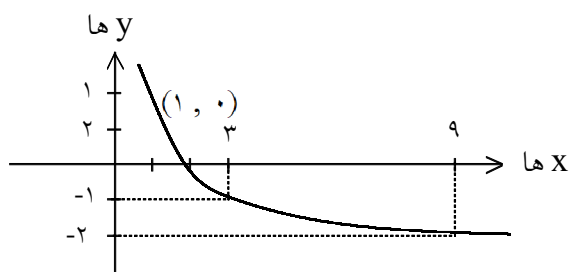
۱۴- اگر  $\text{Log}_6^3 = a$  باشد،  $\text{Log}_6^2$  را بر حسب  $a$  به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_6^2 = \text{Log}_6^{\frac{6}{3}} = \text{Log}_6^6 - \text{Log}_6^3 = 1 - a$$

۱۵- نمودار تابع با ضابطه‌ی  $y = \text{Log}_{\frac{1}{3}} x$  را رسم کنید.

« پاسخ »



y	0	-1	-2	1	2
x	1	3	9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y = x$$

۱۶- اگر  $f(x) = 3 - 2\text{Log}_{\frac{x}{2} - 5}$  مقدار  $f(42)$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(42) = 3 - 2\text{Log}_{\frac{42}{2} - 5} = 3 - 2\text{Log}_{16} = 3 - 2 \times 2 = -1$$

۱۷- از معادله  $\text{Log}(x - 3) = 2 - \frac{1}{3}\text{Log}25$  مقدار  $x$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}(x - 3) + \frac{1}{3}\text{Log}25 = 2$$

$$\text{Log}(x - 3)5 = 2 \Rightarrow 5x - 15 = 100 \Rightarrow 5x = 115 \Rightarrow x = 23$$

۱۸- اگر  $\text{Log}2 = a$  و  $\text{Log}3 = b$  باشد، آنگاه حاصل  $\text{Log}15$  کدام است؟

« پاسخ »

$$\text{Log}15 = \text{Log}3 \times 5 = \text{Log}3 + \text{Log}5 = \text{Log}3 + 1 - \text{Log}2 = b - a + 1$$

۱۹- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } 2\text{Log}_5 3 - \text{Log}_5 x = \text{Log}_5 3 + \text{Log}_5 9 \quad \text{ب) } (\text{Log}_7 \sqrt{5} - \text{Log}_7 3)$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } 2\text{Log}_5 3 - \text{Log}_5 x = \text{Log}_5 3 + \text{Log}_5 9 \Rightarrow 2\text{Log}_5 3 - \text{Log}_5 3 - \text{Log}_5 9 = \text{Log}_5 x$$

$$\Rightarrow \text{Log}_5 3 - \text{Log}_5 9 = \text{Log}_5 x \Rightarrow \text{Log}_5 \frac{3}{9} = \text{Log}_5 x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \text{Log}_7 \sqrt{5} - \text{Log}_7 3 &= (\text{Log}_7 \sqrt{5} - \text{Log}_7 3) \\ &= \text{Log}_7 \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \\ &= \text{Log}_7 \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right)^2 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

۲۰- اگر  $\text{Log}_c a = \frac{3}{4}$  و  $\text{Log}_c b = \frac{7}{9}$  باشد، مقدار  $\text{Log}_c \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3}$  را بیابید.

« پاسخ »

با استفاده از ویژگی تغییر مبنا  $\text{Log}_b a = \frac{\text{Log}_c a}{\text{Log}_c b}$  داریم:

$$\begin{aligned} \text{Log}_c \frac{a^2 \sqrt{b}}{b^3} &= \frac{\text{Log}_c a^2 \sqrt{b}}{\text{Log}_c b^3} = \frac{\text{Log}_c a^2 + \text{Log}_c \sqrt{b}}{3\text{Log}_c b} = \frac{2\text{Log}_c a + \frac{1}{2}\text{Log}_c b}{3\text{Log}_c b} \\ &= \frac{2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)}{3\left(\frac{7}{9}\right)} = \frac{17}{21} \end{aligned}$$

۲۱- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

$$\text{Log}_7 (2x + 5) - \text{Log}_7 (x - 1) = 2\text{Log}_7 3$$

« پاسخ »

$$\text{Log}_7 \frac{2x + 5}{x - 1} = \text{Log}_7 9 \Rightarrow \frac{2x + 5}{x - 1} = 9 \Rightarrow x = 2$$

(۰/۵)                      (۰/۲۵)                      (۰/۲۵)

۲۲- ابتدا معادله‌ی لگاریتمی  $\text{Log}(x - 2) = 3\text{Log}2 - \text{Log}(x - 4)$  را حل کرده و سپس حاصل  $\text{Log}_{27}\sqrt{x - 3}$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\text{Log}(x - 2) = \text{Log}\frac{8}{x - 4} \Rightarrow x - 2 = \frac{8}{x - 4} \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 8$$

(۰/۲۵)                      (۰/۲۵)

$$x(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 6 & (۰/۵) \end{cases} \quad \text{Log}_{27}\sqrt{3} = \text{Log}_{27}3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \quad (۰/۲۵)$$

(۰/۲۵)

۲۳- معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

ب)  $\text{Log}(x + 4) = \frac{1}{2}\text{Log}(2x + 11)$

الف)  $\text{Log}\sqrt{x+3} + \text{Log}\sqrt{x-3} = 2$

« پاسخ »

الف)  $\text{Log}\sqrt{(x-3)(x+3)} = 2 \Rightarrow (x+3)(x-3) = (\sqrt{7})^2 = 7$

$$x^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$x = -4$  غیرقابل قبول است زیرا به ازای آن عبارت جلوی لگاریتم‌ها منفی می‌شود.

ب)  $\text{Log}(x + 4) = \frac{1}{2}\text{Log}(2x + 11) \Rightarrow 2\text{Log}(x + 4) = \text{Log}(2x + 11)$

$$\Rightarrow \text{Log}(x + 4)^2 = \text{Log}(2x + 11) \Rightarrow (x + 4)^2 = 2x + 11$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -5$  غیرقابل قبول است، زیرا به ازای آن عبارت جلوی  $\text{Log}(x + 4)$  منفی خواهد شد.

$$\text{Log}_3(x - 1) + \text{Log}_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$$

۲۴- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_3(x - 1) + \text{Log}_3\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2$$

$$\text{Log}_3(x - 1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2 \Rightarrow (x - 1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 3^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + x - \frac{x}{2} - 1 = 9$$

$$x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ ق ق}, x = 4 \text{ غ ق ق}$$



$$\text{Log}\sqrt{0.75}$$

۲۵- اگر  $\text{Log}2 = a$  و  $\text{Log}3 = b$  باشد، حاصل عبارت مقابل را بیابید.

« پاسخ »

$$\text{Log}2 = a, \text{Log}3 = b$$

$$\begin{aligned} \text{Log}\sqrt{0.75} &= \text{Log}\left(\frac{75}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\text{Log}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(\text{Log}3 - \text{Log}2^2) = \frac{1}{2}(\text{Log}3 - 2\text{Log}2) \\ &= \frac{1}{2}(b - 2a) \end{aligned}$$

۲۶- اگر  $f(x) = 8x + 1$  مقدار  $f(2 + 2\text{Log}_2^x)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} 2 + 2\text{Log}_2^x = 6 &\Rightarrow 2\text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \xrightarrow{x=4} f(2 + 2\text{Log}_2^4) \\ &= 8(4) + 1 \Rightarrow f(6) = 33 \end{aligned}$$

۲۷- اگر  $f(x) = 20x + 1$  مقدار  $f(4 - \text{Log}_5^x)$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$4 - \text{Log}_5^x = 5 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{1}{5} \Rightarrow f\left(4 - \text{Log}_5^{\frac{1}{5}}\right) = 20\left(\frac{1}{5}\right) + 1 \Rightarrow f(5) = 4 + 1 \Rightarrow f(5) = 5$$

$$f(x) = \sqrt{2 - \text{Log}_{11}^{(x-1)}}$$

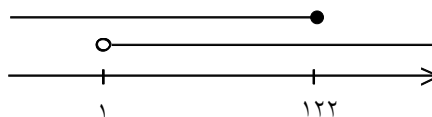
۲۸- دامنه تابع زیر را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$2 - \text{Log}_{11}^{(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_{11}^{(x-1)} \leq 2 \Rightarrow x - 1 \leq 121 \Rightarrow x \leq 122 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (1, 122]$$



۲۹- حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

$$\text{الف) } \text{Log}_{\sqrt{8}}^4$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log}_{\sqrt{8}}^4 = \text{Log}_{\sqrt{\frac{2^3}{2^2}}}^4 = \text{Log}_{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{2}}}}^4 = \text{Log}_{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2}}^4 = \frac{4}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$\text{ب) } \text{Log}_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{9} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

۳۰- دامنه تابع  $f(x) = \frac{1}{\text{Log}_5(x-1)}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (1)$$

$$\text{Log}_5(x-1) \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} D_f = (1, +\infty) - \{2\}$$

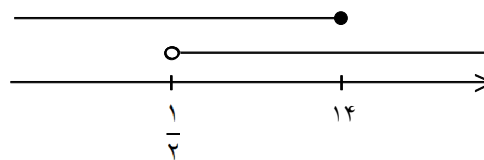
۳۱- نامعادله  $\text{Log}_3^{(2x-1)} \leq 3$  را حل کنید.

« پاسخ »

$$2x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Log}_3^{(2x-1)} \leq 3 \Rightarrow 2x-1 \leq 3^3 \Rightarrow 2x \leq 28 \Rightarrow x \leq 14 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \text{جواب} = \left(\frac{1}{2}, 14\right]$$



۳۲- در معادله  $\frac{-6 + \text{Log}_2^x}{256} = \frac{1}{256}$  ریشه‌ها را حساب کنید.

« پاسخ »

$$x^{-6 + \text{Log}_2^x} = \frac{1}{256} \Rightarrow \text{Log}_2 x^{-6 + \text{Log}_2^x} = \text{Log}_2 \frac{1}{256} \Rightarrow (-6 + \text{Log}_2^x) \text{Log}_2^x = \text{Log}_2^{-8}$$

$$\text{Log}_2^x = t \rightarrow (-6 + t)t = -8 \Rightarrow t^2 - 6t + 8 = 0 \Rightarrow (t - 2)(t - 4) = 0$$

$$\begin{cases} t = 2 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4 \\ t = 4 \Rightarrow \text{Log}_2^x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

۳۳- حاصل  $\text{Log}_2^5 \sqrt{2} + \text{Log}_2^{16}$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log}_2^5 \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{Log}_2^{16} = 2 \text{Log}_2^5 + 4 = 2 \text{Log}_2^{25} + 4 = 25 + 4 = 29$$

۳۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $\text{Log}(x^2 + 19) = 2$       ب)  $\text{Log}_3(\text{Log}_2^{(x+1)} - 2) = 1$

« پاسخ »

الف)  $\text{Log}(x^2 + 19) = 2 \Rightarrow x^2 + 19 = 100 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 & \text{ق ق} \\ x = -9 & \text{ق ق} \end{cases}$

ب)  $\text{Log}_3(\text{Log}_2^{(x+1)} - 2) = 1 \Rightarrow \text{Log}_2^{(x+1)} - 2 = 3 \Rightarrow \text{Log}_2^{(x+1)} = 5 \Rightarrow x + 1 = 2^5 \Rightarrow x = 31$       ق ق

۳۵- اگر  $\text{Log} 2 = a$  و  $\text{Log} 3 = b$  باشد، لگاریتم‌های زیر را بر حسب  $a$ ،  $b$  بنویسید.  
 الف)  $\text{Log} 270$  (الف)  $\text{Log} 80$  (ب)  $\text{Log} 0/125$  (پ)  $\text{Log} 50$  (ت)

« پاسخ »

$$\text{الف) } \text{Log} 270 = \text{Log} 3^3 \times 10 = 3\text{Log} 3 + \text{Log} 10 = 3b + 1$$

$$\text{ب) } \text{Log} 80 = \text{Log} 2^3 \times 10 = 3\text{Log} 2 + \text{Log} 10 = 3a + 1$$

$$\text{پ) } \text{Log} 0/125 = \text{Log} \frac{1}{125} = \text{Log} 1 - \text{Log} 125 = 0 - 3a = -3a$$

$$\text{ت) } \text{Log} 50 = \text{Log} \frac{100}{2} = \text{Log} 100 - \text{Log} 2 = 2 - a$$

۳۶- دامنه توابع زیر را حساب کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است.)

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{3 + \text{Log}_{0/2}(x+10)} \quad \text{ب) } g(x) = \text{Log}_5(4 - [x]^2)$$

« پاسخ »

$$\text{الف) } x + 10 > 0 \Rightarrow x > -10 \quad (1)$$

$$3 + \text{Log}_{0/2}(x+10) \geq 0 \Rightarrow \text{Log}_{0/2}(x+10) \geq -3 \Rightarrow x+10 \leq (0/2)^{-3} \Rightarrow x+10 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

$$\Rightarrow x+10 \leq 5^3 \Rightarrow x+10 \leq 125 \Rightarrow x \leq 115 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (-10, 115]$$

$$\text{ب) } 4 - [x]^2 > 0 \Rightarrow -2 < [x] < 2 \Rightarrow -1 \leq x < 2$$

$$D_g = [-1, 2)$$

۳۷- مقدار  $A$  را حساب کنید.

$$A = \frac{1}{\text{Log}_3^V + 1} + \frac{1}{\text{Log}_V^3 + 1}$$

« پاسخ »

$$A = \frac{1}{\text{Log}_3^V + \text{Log}_3^3} + \frac{1}{\text{Log}_V^3 + \text{Log}_V^V} = \frac{1}{\text{Log}_3^{21}} + \frac{1}{\text{Log}_V^{21}} = \text{Log}_{21}^3 + \text{Log}_{21}^V$$

$$= \text{Log}_{21}^{21} = 1$$

۳۸- اگر  $\text{Log} 2 = a$  و  $\text{Log} 3 = b$  باشد، لگاریتم‌های زیر را برحسب  $a$  ,  $b$  بنویسید.

الف)  $\text{Log} 24$  (الف)  $\text{Log} 120$  (ب)  $\text{Log} 0.5$  (پ)  $\text{Log} \frac{4}{3}$  (ت)

« پاسخ »

الف)  $\text{Log} 24 = \text{Log} 2^3 \times 3 = 3\text{Log} 2 + \text{Log} 3 = 3a + b$

ب)  $\text{Log} 120 = \text{Log} 2^2 \times 3 \times 10 = 2\text{Log} 2 + \text{Log} 3 + \text{Log} 10 = 2a + b + 1$

پ)  $\text{Log} 0.5 = \text{Log} \frac{1}{2} = \text{Log} 1 - \text{Log} 2 = 0 - a = -a$

ت)  $\text{Log} \frac{4}{3} = \text{Log} 4 - \text{Log} 3 = \text{Log} 2^2 - b = 2a - b$

۳۹- مقادیر زیر را حساب کنید. ( [ ] نماد جزء صحیح است. )

الف)  $[\text{Log}_2^{120}] + [\text{Sin} 6]$

ب)  $[\text{Log}_5^{100}] + [\text{Cos} 2]$

« پاسخ »

الف)  $2^6 < 120 < 2^7 \Rightarrow \text{Log}_2^6 < \text{Log}_2^{120} < \text{Log}_2^7 \Rightarrow 6 < \text{Log}_2^{120} < 7 \Rightarrow [\text{Log}_2^{120}] = 6$

$\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi \Rightarrow \text{Sin} \frac{3\pi}{2} < \text{Sin} 6 < \text{Sin} 2\pi \Rightarrow -1 < \text{Sin} 6 < 0 \Rightarrow [\text{Sin} 6] = -1$

$\Rightarrow [\text{Log}_2^{120}] + [\text{Sin} 6] = 6 - 1 = 5$

ب)  $5^2 < 100 < 5^3 \Rightarrow \text{Log}_5^2 < \text{Log}_5^{100} < \text{Log}_5^3 \Rightarrow 2 < \text{Log}_5^{100} < 3 \Rightarrow [\text{Log}_5^{100}] = 2$

$\frac{\pi}{2} < 2 < \pi \Rightarrow \text{Cos} \pi < \text{Cos} 2 < \text{Cos} \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 < \text{Cos} 2 < 0 \Rightarrow [\text{Cos} 2] = -1$

$\Rightarrow [\text{Log}_5^{100}] + [\text{Cos} 2] = 2 - 1 = 1$

۴۰- در معادله  $(\text{Log}_5^x + 3) = 625$  مقدار  $x$  را حساب کنید.

« پاسخ »

$$(\text{Log}_5^x + 3) = 625 \Rightarrow \text{Log}_x (\text{Log}_5^x + 3) = \text{Log}_5^{625} \Rightarrow (\text{Log}_5^x + 3) \text{Log}_5^x = 4$$

$$\text{Log}_5^x = t \rightarrow (t + 3)t = 4 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow \text{Log}_5^x = 1 \Rightarrow x = 5$$

$$t = -4 \Rightarrow \text{Log}_5^x = -4 \Rightarrow x = 5^{-4} = \frac{1}{625}$$

۴۱- اگر نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = 2 + \text{Log}_a^{(x+1)}$  از نقطه  $(1, 5)$  عبور کند، مقدار  $a$  چه قدر است؟

« پاسخ »

$$f(1) = 5 \Rightarrow 2 + \text{Log}_a^2 = 5 \Rightarrow \text{Log}_a^2 = 3 \Rightarrow a^3 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[3]{2}$$

$$4 \text{Log}_a - \frac{2}{5} \text{Log}_x + \text{Log} b =$$

۴۲- عبارت روبه‌رو را به یک لگاریتم تبدیل کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log} a^4 - \text{Log} \sqrt[5]{x^2} + \text{Log} b = \text{Log} \frac{a^4 b}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$\text{Log} (2x + 7) - 2 \text{Log} 3 = \text{Log} x$$

۴۳- معادله‌ی لگاریتمی مقابل را حل کنید.

« پاسخ »

$$\text{Log} (2x + 7) - \text{Log} 9 = \text{Log} x \Rightarrow \text{Log} \frac{2x + 7}{9} = \text{Log} x \Rightarrow \frac{2x + 7}{9} = x$$

$$2x + 7 = 9x \Rightarrow x = 1$$

۴۴- عبارت روبه‌رو را به صورت یک لگاریتم بنویسید.

$$3\text{Log}x + \frac{2}{3}\text{Log}y - \text{Log}a$$

« پاسخ »

$$\text{Log}x^3 + \text{Log}\sqrt[3]{y^2} - \text{Log}a = \text{Log}\frac{x^3 \sqrt[3]{y^2}}{a}$$

۴۵- در جای خالی عدد مناسب قرار دهید.

$$\text{Log}_{\square} 0.001 = -3$$

« پاسخ »

$$10^{-3} = 0.001$$

۴۶- اگر  $f(x) = \text{Log}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$  باشد، آنگاه حاصل  $f(2) + f(3) + \dots + f(99)$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$f(2) + f(3) + \dots + f(99) = \text{Log}\frac{3}{4} + \text{Log}\frac{8}{9} + \text{Log}\frac{15}{16} + \dots + \text{Log}\frac{99^2 - 1}{99^2}$$

$$= \text{Log}\left(\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} \times \frac{15}{16} \times \dots \times \frac{99^2 - 1}{99^2}\right)$$

$$= \text{Log}\left(\frac{1 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}} \times \frac{\cancel{2} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{3}} \times \frac{\cancel{3} \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times \cancel{4}} \times \frac{\cancel{4} \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times \cancel{5}} \times \dots \times \frac{\cancel{98} \times \cancel{99}}{\cancel{99} \times \cancel{99}} \times \frac{\cancel{99} \times 100}{\cancel{99} \times 99}\right)$$

$$= \text{Log}\frac{1 \times 100}{2 \times 99} = 2 - \text{Log} 198$$

۴۷- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

(الف)  $y = -2^x + 1$

(ب)  $y = 2^{|x|}$

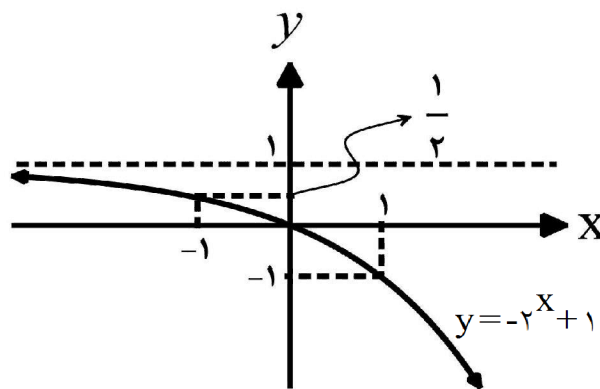
(ب)  $y = -\text{Log}_2(x-1)$

(ت)  $y = \frac{|x|}{x} \text{Log} x$

« پاسخ »

(الف)

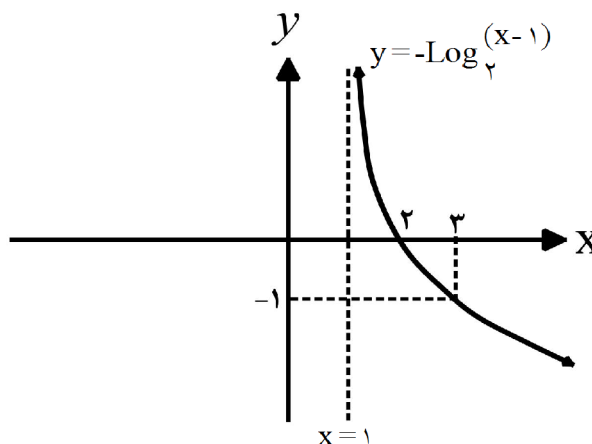
x	-1	0	1
y	$\frac{1}{2}$	0	-1



(ب)

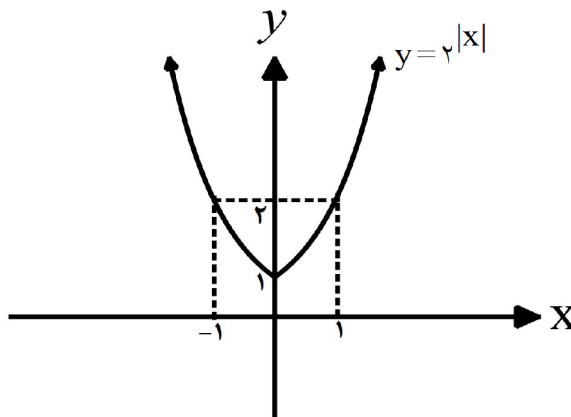
x	2	3
y	0	-1

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



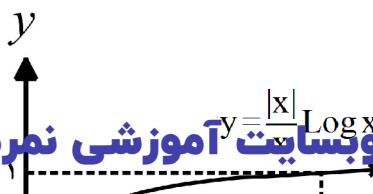
(ب)

x	-1	0	1
y	2	1	2



(ت)

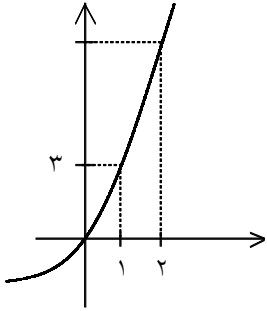
x	1	10
y	0	1



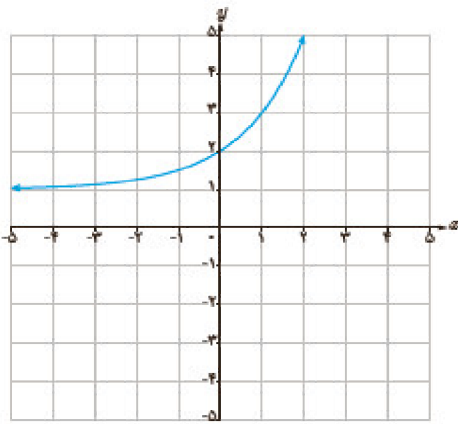


۴۸- نمودار تابع با ضابطه  $y = 4^x - 1$  را در بازه  $[-2, 2]$  رسم کنید.

« پاسخ »



x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{3}{4}$	0	3	15



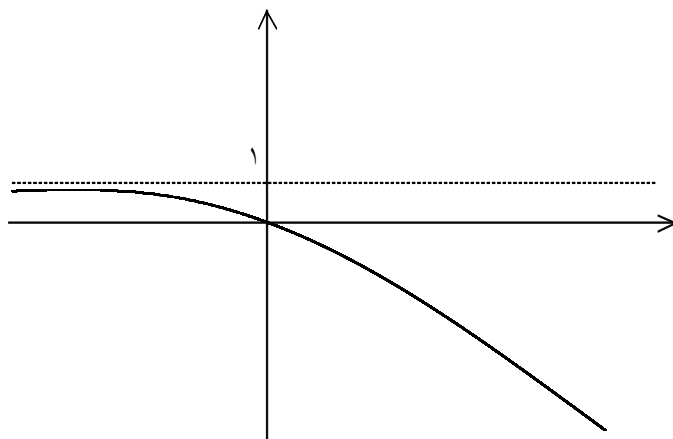
۴۹- در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه  $y = a + 2^{(x-b)}$  رسم شده است.  $a$  و  $b$  را به دست آورید.

« پاسخ »

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} &\Rightarrow a + 2^{-b} = 2 \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} a + 2^{2-b} = 5 \Rightarrow a + 2^{2-b} - a - 2^{-b} = 5 - 2 \\ \Rightarrow 2^{2-b} - 2^{-b} &= 3 \Rightarrow 2^{-b}(4 - 1) = 3 \Rightarrow 2^{-b} = 1 \Rightarrow 2^{-b} = 2^0 \Rightarrow -b = 0, b = 0 \\ a + 2^0 &= 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow a = 1, b = 0 \end{aligned}$$

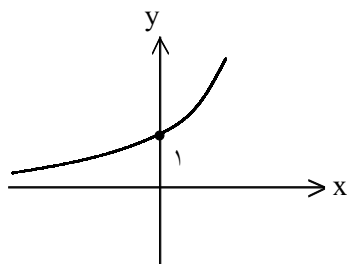
۵۰- نمودار تابع  $f(x) = -(3)^x + 1$  را رسم کنید.

« پاسخ »



۵۱- نمودار تابع  $f(x) = 2^x$  را رسم کنید و دامنه و برد آنرا بنویسید.

« پاسخ »



$$f(x) = 2^x$$
$$D_f = \mathbb{R}$$
$$R_f = (0, +\infty)$$

۵۲- الف) نامعادله توانی  $4^{2x-1} > \frac{1}{1.24}$  را حل کنید.

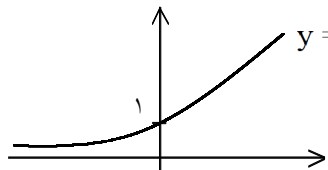
ب) نمودار تابع  $y = 2^x - 1$  و  $y = 2^{x-1}$  را به کمک نمودار  $y = 2^x$  رسم کنید.

« پاسخ »

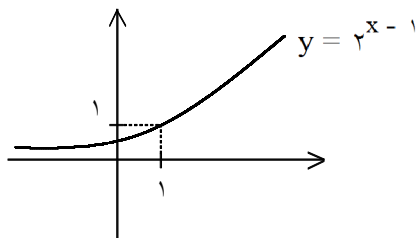
$$2^{4x-2} > \frac{1}{2^1} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-1} \Rightarrow 4x - 2 > -1$$

الف)

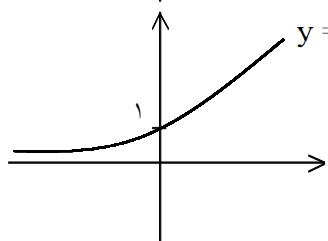
$$4x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{4}$$



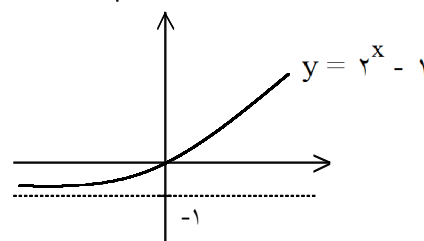
⇒



ب)



⇒



$$53- \text{الف) در تابع } f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^6}{x}$$

الف) دامنه تابع را حساب کنید.

ب) نمودار تابع را رسم کنید.

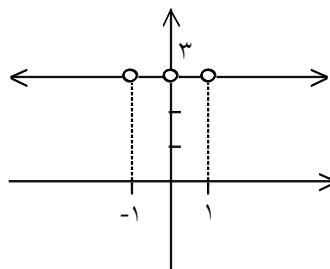
« پاسخ »

$$\begin{cases} x^6 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0 \\ x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{cases} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

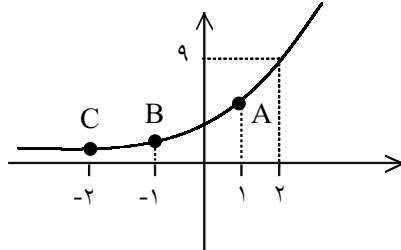
الف)

ب)

$$f(x) = \frac{6}{2} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x} = 3$$



۵۴- نمودار زیر متعلق به تابع نمایشی  $y = a^x$  است. مختصات نقاط A و B و C را حساب کنید.



« پاسخ »

ابتدا نقطه‌ی (۲, ۹) را درون ضابطه تابع قرار می‌دهیم تا  $a$  به دست آید.

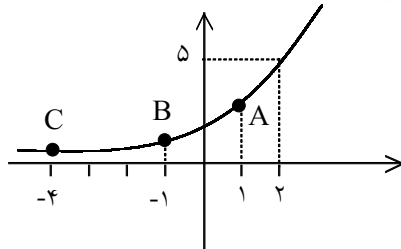
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow 9 = a^2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow y = 3^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 3^1 = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$$

$$x = -2 \Rightarrow y = 3^{-2} = \frac{1}{9} \Rightarrow C\left(-2, \frac{1}{9}\right)$$

۵۵- نمودار زیر متعلق به تابع نمایشی  $y = a^x$  است. مختصات نقاط A و B و C را حساب کنید.



« پاسخ »

ابتدا نقطه‌ی (۲, ۵) را درون ضابطه تابع قرار می‌دهیم تا  $a$  به دست آید.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow 5 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{5} \Rightarrow y = (\sqrt{5})^x$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^1 = \sqrt{5} \Rightarrow A(1, \sqrt{5})$$

$$x = -1 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow B\left(-1, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$x = -4 \Rightarrow y = (\sqrt{5})^{-4} = \frac{1}{25} \Rightarrow C\left(-4, \frac{1}{25}\right)$$

۵۶- اگر انرژی آزاد شده حاصل از یک زلزله  $10^{21} \text{ Erg} \times 2/6$  باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.  
( $\text{Log } 2/6 = 0/4$ )

« پاسخ »

$$E = 2/6 \times 10^{21} \xrightarrow{\text{Log } 2/6 = 0/4 \Rightarrow 2/6 = 10^{0/4}} E = 10^{0/4} \times 10^{21} \Rightarrow E = 10^{21/4} \text{ Erg}$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^{21/4} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 21/4 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 1/5 M = 9/6 \Rightarrow M = \frac{9/6}{1/5} = 6/4$$

۵۷- زلزله‌ای به بزرگی  $5/9$  ریشتر در  $30$  کیلومتری شهر کاکلی استان بوشهر در صبح پنجشنبه  $30$  فروردین به وقوع پیوست. انرژی آزاد شده برحسب ارگ را حساب کنید. ( $\text{Log } 4/5 = 0/65$ )

« پاسخ »

$$M = 5/9$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 1/5 (5/9) \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 1/9$$

$$\Rightarrow \text{Log } E = 20/65 \Rightarrow E = 10^{20/65} = 10^{0/65} \times 10^{20} \xrightarrow{\text{Log } 4/5 = 0/65 \Rightarrow 4/5 = 10^{0/65}}$$

$$E = 4/5 \times 10^{20}$$

۵۸- اگر انرژی آزاد شده یک زلزله  $10^{20} \text{ Erg} \times 6/4$  باشد، شدت زلزله برحسب ریشتر را حساب کنید.  
( $\text{Log } 2 = 0/3$ )

« پاسخ »

$$E = 6/4 \times 10^{20} = 64 \times 10^{19} = 2^6 \times 10^{19} \xrightarrow{\text{Log } 2 = 0/3 \Rightarrow 2 = 10^{0/3}} E = (10^{0/3})^6 \times 10^{19}$$

$$= 10^{20/8}$$

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow \text{Log } 10^{20/8} = 11/8 + 1/5 M \Rightarrow 20/8 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow 1/5 M = 9 \Rightarrow M = 6$$

۵۹- زلزله‌ای به شدت  $7/6$  ریشتر در  $20$  سپتامبر  $1999$  در شهر نانتو تایوان اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟ ( $\text{Log } 2 = 0/3$ )

« پاسخ »

$$\text{Log } E = 11/8 + 1/5 M$$

$$M = 7/6 \xrightarrow{\text{Log } 2 = 0/3} \text{Log } E = 11/8 + 1/5 (7/6) \Rightarrow \text{Log } E = 11/8 + 11/4 \Rightarrow \text{Log } E = 23/4$$

$$\Rightarrow E = (2)^4 \times 10^{22} \text{ Erg} = 16 \times 10^{22} \text{ Erg} = 1/6 \times 10^{23} \text{ Erg}$$

۶۰- زلزله‌ای به شدت ۸/۸ ریشتر در ۳۱ ژانویه ۱۹۰۶ در شهر اکوادور در کلمبیا اتفاق افتاد. انرژی آزاد شده در این زلزله چه قدر بوده است؟

« پاسخ »

$$\text{Log}E = 11/8 + 1/5M$$

$$\begin{aligned} M = 8/8 \\ \longrightarrow \text{Log}E = 11/8 + 1/5(8/8) \Rightarrow \text{Log}E = 11/8 + 13/2 \Rightarrow \text{Log}E = 25 \\ \Rightarrow E = 10^{25} \text{ Erg} \end{aligned}$$

۶۱- جرم باکتری‌ها در زمان  $t$  از فرمول  $m(t) = 2^t$  به دست می‌آید. مشخص کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۲۵۰۰ گرم می‌شود؟ ( $\text{Log}2 \simeq 0/3$ )

« پاسخ »

$$m(t) = 2^t \Rightarrow 2^t = 2500 \Rightarrow t = \text{Log}_2 2500$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\text{Log}2500}{\text{Log}2} = \frac{\text{Log}100 + \text{Log}5^2}{\text{Log}2} = \frac{2 + 2\text{Log}\frac{10}{2}}{\text{Log}2} = \frac{2 + 2(\text{Log}10 - \text{Log}2)}{\text{Log}2} \\ &= \frac{2 + 2(1 - 0/3)}{0/3} = 11/33 \end{aligned}$$

۶۲- انرژی آزاد شده یک زلزله  $2 \times 10^{19}$  Erg است. شدت این زلزله چند ریشتر می‌باشد؟ ( $\text{Log}2 = 0/3$ )

« پاسخ »

$$E = 2 \times 10^{19} \text{ Erg}$$

$$M = ?$$

$$\begin{aligned} \text{Log}2 \times 10^{19} = 11/8 + 1/5M \Rightarrow \text{Log}2 + \text{Log}10^{19} = 11/8 + 1/5M \\ \Rightarrow 0/3 + 19 = 11/8 + 1/5M \Rightarrow 1/5M = 7/5 \Rightarrow M = 5 \end{aligned}$$

شدت زلزله ۵ ریشتر است.