درس اوّل : تفکر جسمی و مقاطع مخروطی

در حالتی که شما به موضوعی فکر کنید و از عبارات ، جملات و شیوه های زبانی برای تفکـر اسـتفاده نمـی کنید، این حالت را تفکر تجسمی می نامند. در واقع در تفکر تجسمی به جای کلمـات، تـصاویری را در ذهـن خود می بینید و به کمک این تصویر سازی ذهنی به یک موضوع یا موقعیت فکر می کنید.

فرایند تفکر تجسمی، مستلزم تشکیل و دست ورزی تصاویر با قلم و کاغذ، فناوری و یا به صورت ذهنی است که به بررسی ، کشف و درک مفاهیم منجر می شود. این نوع تفکر ، نقش مهمی در حل مسئله های ریاضـی و همینطور حل مسائل در زندگی روزمره دارد. موقعیت هایی که می تواند به تقویـت تفکـر تجـسمی کمـک کنند، عبارتند از : تجسم ذهنی یک جسم پس از چرخاندن آن در فضا، ترسیم سطح گسترده‌ی اجسام هندسی و ترسیم یک جسم سه بعدی روی سطح میز ، ترسیم نمادهای مختلف اجسام، دوران یک شـکل حـول یـک نقطه یا حول یک محور در صفحه و فضل و تجسم اجسام هندسی بعد از برش و .... است.

در این درس بعد از بیان برخی از موقعیت های فوق، دوران اشکال هندسی حول یک محور و برش اجـسام را بررسی می کنیم.

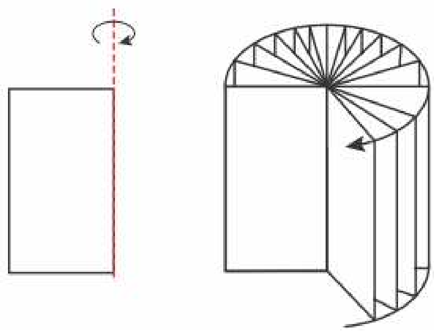
استفاده از تصویر سازی ذهنی به جای بکارگیری عبارات و جملات کلامی را تفکر تجسمی می نامند.

***

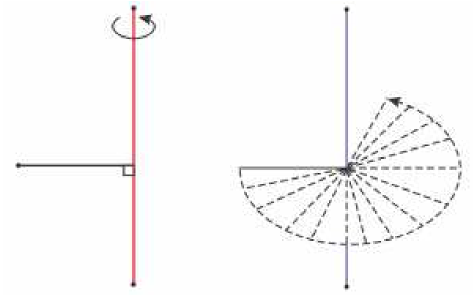
دوران حول یک محور

وقتی که شکل های هندسی متفاوتی در فضا حول یک محور دوران داده شوند، جسم های مختلفی ایجاد می کنند. به نمونه های زیر توجه کنید و بنویسید که جسم حاصل از دوران چه نام دارد؟

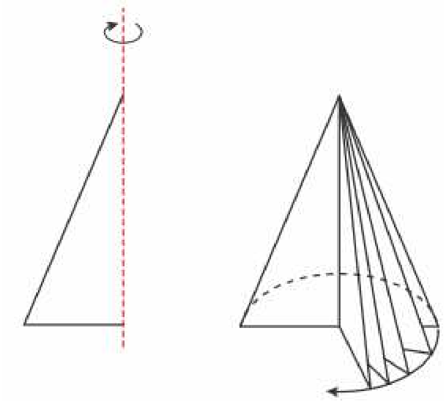
الف : جسم حاصل از دوران یک مستطیل، حول یک ضلع آن



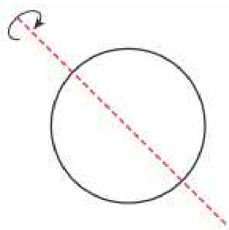
ب : شکل حاصل از دوران یک پاره خط، حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است.



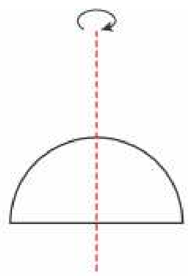
پ : جسم حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه، حول یکی از اضلاع زاویه‌ی قائمه



ت : جسم حاصل از دوران یک دایره، حول یکی از قطرهای آن



ث : جسم حاصل از دوران یک نیم دایره، حول شعاع عمود بر قطر آن



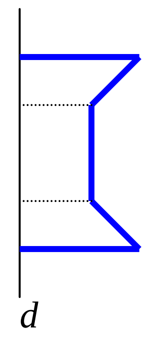
نام جسم یا شکل حاصل در موارد فوق را بنویسید.

الف : استوانه ب : دایره پ : مخروط ت : کره ث : نیم کره

تمرین برای حل :

۱ : اگر یک لوزی با طول قطرهای ۴ و ۶ سانتی متر، حول قطر بزرگ دوران داده شود، حجم جسم حاصل چقدر است.

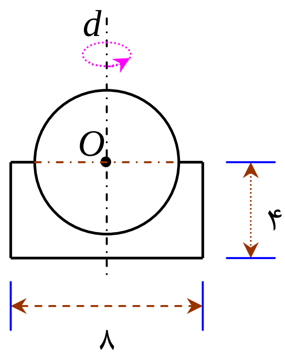
۲ : نام جسم حاصل از دوران شکل مقابل حول خط d را بنویسید.



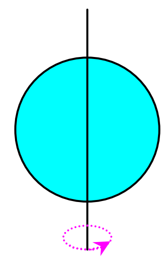
۳ : در شکل مقابل شعاع دایره ۳ سانتی متر است.

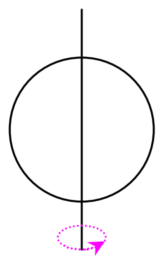
اگر شکل را حول خط d گذرا از مرکز دایره، مطابق شکل دوران دهیم.

حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.



توجه : توجه شود که جسم حاصل از دایره حول یک قطر آن یک کره‌ی توخالی و جسم حاصل از سطح دایره ای ، یک کره‌ی توپر است.





اکنون به تمرین بعد با در نظر گرفتن این موضوع پاسخ دهید.

۴ : نام جسم حاصل از دوران را در هر مورد بنویسید.

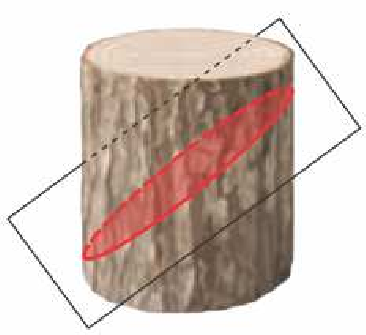
الف : جسم حاصل از دوران یک مثلث قائم الزاویه و یک سطح مثلثی قائم الزاویه حول یک ضلع آن را بنویسید.

ب : جسم حاصل از دوران یک مستطیل و یک سطح مستطیلی حول یک ضلع آن را بنویسید.

***

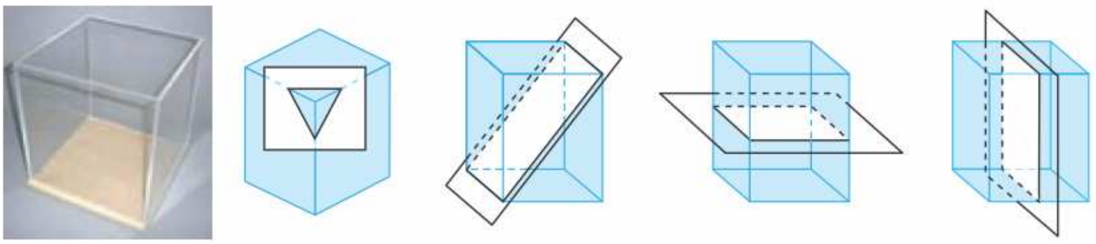
برش

اگر جسمی را در حالت های مختلفی برش دهیم، می توان تجسم کرد که شکل حاصل ، چه شکلی می تواند باشد؟ برای مثال شکل حاصل از برش یک استوانه در حالت مایل، یک بیضی بوجود می آورد.

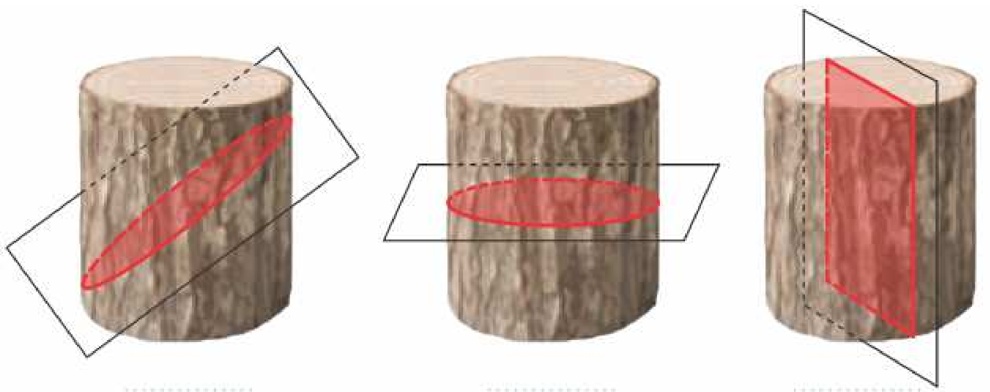


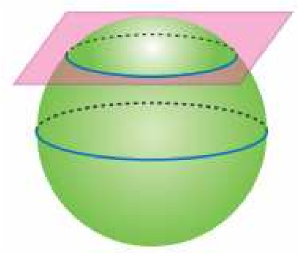
شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود، سطح مقطع آن جسم نامیده می شود.

در شکل های زیر بعضی از حالت های برخورد یک صفحه با یک مکعب مستطیل توخالی با قاعده‌ی مربع شکل، نمایش داده شده است. در هر حالت نام سطح مقطع را بنویسید.

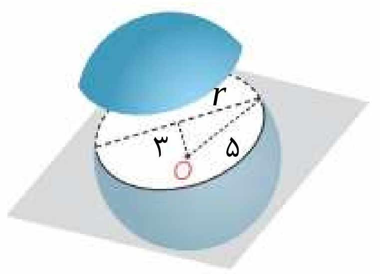


سطح مقطع استوانه با صفحه های عمودی، افقی و صفحه‌ی مایلی که با قاعده های استوانه متقاطع نباشد را بنویسید.





سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره به چه شکل است؟ در چه حالتی این سطح مقطع، بیشترین مساحت را دارد؟



مثال : صفحه‌ی P کره ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی متر را قطع کرده است. اگر فاصله‌ی نقطه‌ی O از صفحه‌ی ۳ سانتی باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟

حل :

شعاع دایره‌ی سطح مقطع $\quad r^{۲}+۹=۲۵ \rightarrow r^{۲}=۱۶ \rightarrow r=۴$

مساحت دایره‌ی سطح مقطع $\quad S=\pi r^{۲}=۱۶\pi$

تمرین برای حل :

۵ : در هر مورد شکل حاصل از دوران حول محور را در حالت های زیر مشخص کنید.

الف : جسم حاصل از دوران نیم خط حول یک محور

ب : جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه، حول یک ضلع

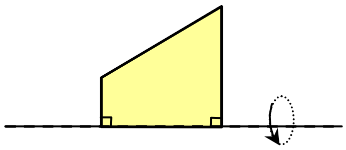
ج : جسم حاصل از دوران مثلث قائم الزاویه، حول وتر آن

۶ : مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ سانتی متر را حول عرض آن دوران داده ایم.

الف : حجم استوانه‌ی حاصل را رسم کنید.

ب : اگر صفحه ای عمود بر قاعده‌ی استوانه آن را قطع کند. بیشترین مساحت ممکن برای سطح مقطع حاصل چقدر است؟

۷ : در شکل روبرو می خواهیم ذوزنقه را حول محور دوران دهیم.



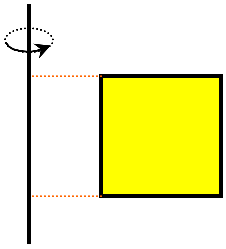
(قاعده های ذوزنقه۳ و۱ سانتی متر و ارتفاع آن۴ سانتی متر است.)

الف : حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

ب : سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه ای که شامل محور دوران باشد را نام بـرده و مـساحت آن را بدست آورید.

۸ : سطح مقطع حاصل از برخورد استوانه و یک صفحه در چه حالتی می تواند یک مربع باشد؟

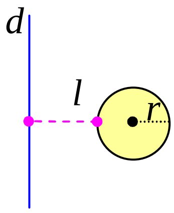
۹ : مربع به ضلع ۳ سانتی متر مطابق شکل روبرو در فاصله‌ی ۲ سـانتی متـر از یک خط راست قرار دارد.



الف : شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب : سطح مقطع این جسم، در برخورد با صفحه ای موازی با قاعده‌ی آن را توصیف کنید.

۱۰ : دایره ای به شعاع r را حول خط d دوران داده ایم. شکل حاصـل را توصـیف کنید.



۱۱ : مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۸۰ و ۶۰ سانتی متر را حول وتر آن دوران داده ایم.

الف : حجم جسم حاصل را محاسبه کنید.

ب : سطح مقطع حاصل از برش یک صفحه عمود بر وتر مثلث چیست؟ بیشترین مساحت این سطح مقطع را بدست آورید.

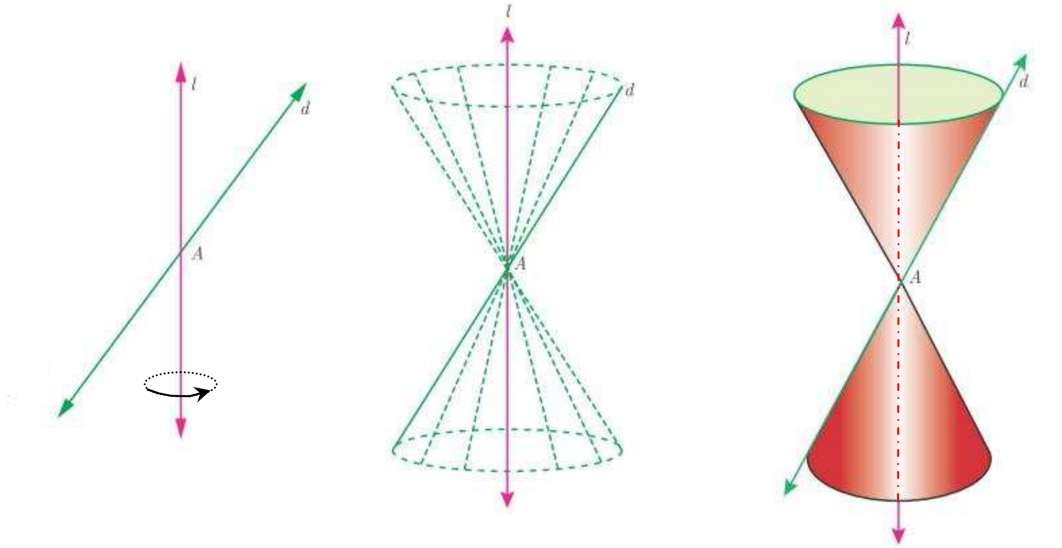
***

تهیه کننده : جابر عامری ، دبیر ریاضی شهرستان های اهواز و باوی

کانال تلگرامی: @mathameri **سایت : www.mathtower.ir**

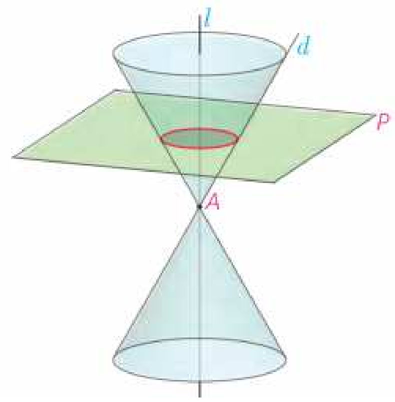
آشنایی با مقاطع مخروطی

دو خط d و l در نقطه ای مانند A متقاطع اند. اگر خط d را حول خط l دوران کامل دهیم. شکل حاصل را سطح مخروطی می نامند. در این حالت خط l را محور ، نقطه‌ی A را رأس و خط d مولد این سطح مخروطی می گویند.

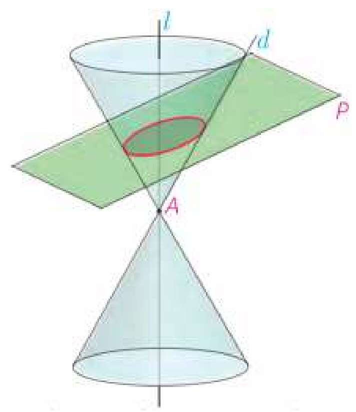


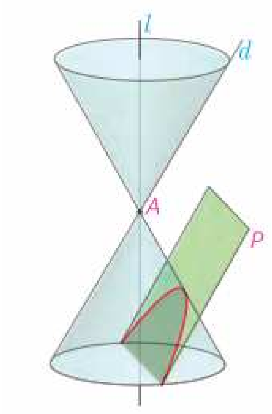
وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می شود. معمولاً سطح مقطع ایجاد شده یک منحنی است. از آنجا که منحنی ها، حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می شوند. در ادامه با انواع مقاطع مخروطی آشنا خواهیم شد.

الف : اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل دایره است.

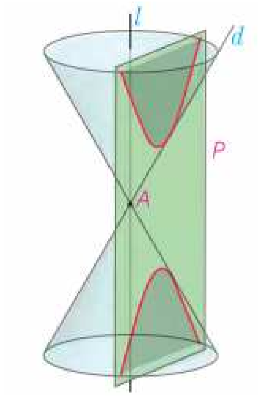


ب : اگر صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس عبور نکند، شکل حاصل بیضی خواهد بود.





پ : اگر صفحه‌ی P در یکی از موقعیت ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل سهمی خواهد بود.



ت : اگر صفحه‌ی P، سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس آن عبور نکند. شکل حاصل هذلولی خواهد بود.

در ادامه می خواهیم با برخی از خواص بیضی و دایره آشنا شویم.

***

تمرین برای حل :

۱۲ : جای خالی را کامل کنید.

الف : اگر صفحه ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، مقطع مخروطی حاصل .... است.

ب : اگر دو خط متقاطع باشند و یکی را حول دیگری دوران دهیم، شکل حاصل را .... می نامند.

۱۳ : در هر یک ، پیرامون حالت مورد نظر را توضیح مختصر دهید.

الف : در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برش یک استوانه دایره است؟

ب : در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برش یک استوانه بیضی است؟

ج : در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برش یک استوانه سهمی است؟

د : در چه حالتی سطح مقطع حاصل از برش یک استوانه مستطیل است؟

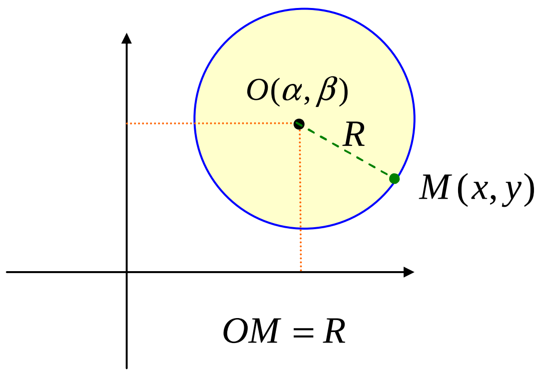
***

درس دوّم : دایره

دایره یکی از مهمترین شکل های هندسی محسوب می شود. در این درس ابتدا دایره را تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت تحلیلی بررسی می کنیم.

معادله‌ی دایره

دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به یک فاصله‌ی ثابتی باشند. نقطه‌ی ثابت را مرکز دایره و فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می گویند.



$OM = R$

اگر $M(x,y)$ نقطه‌ی دلخواهی از دایره باشد در این صورت:

$$OM = R \to OM^{۲} = R^{۲}$$
$$\to (x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$$

که در آن $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز و R اندازه‌ی شعاع دایره است.

معادله‌ی استاندارد دایره	$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲}$

نتیجه : در حالت خاص اگر مرکز دایره روی مبدأ مختصات باشد، معادله‌ی دایره به شکل زیر خواهد آمد.

$$x^{۲} + y^{۲} = R^{۲}$$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $(۳,-۲)$ مرکز و اندازه‌ی شعاع آن۴ باشد.

حل :

$$(x-\alpha)^{۲} + (y-\beta)^{۲} = R^{۲} \to (x-۳)^{۲} + (y+۲)^{۲} = (۴)^{۲}$$

$$\to (x-۳)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۱۶$$

مثال : مختصات نقاط برخورد دایره‌ی مثال قبل را محور های مختصات را به دست آورید.

حل : برای تعیین نقاط برخورد دایره با محور های مختصات، کافی است، در معادله‌ی دایره، یک بار مقدار x و یک بار مقدار y را برابر صفر قرار دهیم.

$$\begin{cases} x=۰ \\ (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \end{cases} \rightarrow (۰-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \rightarrow (y+۲)^۲=۷$$

$$\rightarrow y+۲=\pm\sqrt{۷} \rightarrow y=-۲\pm\sqrt{۷}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور عرضها به شکل زیر است.

$$A(۰,-۲+\sqrt{۷}) \quad \text{و} \quad B(۰,-۲-\sqrt{۷})$$

$$\begin{cases} y=۰ \\ (x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۱۶ \end{cases} \rightarrow (x-۳)^۲+(۰+۲)^۲=۱۶ \rightarrow (x-۳)^۲=۱۲$$

$$\rightarrow x-۳=\pm۲\sqrt{۳} \rightarrow y=۳\pm۲\sqrt{۳}$$

پس نقاط برخورد نمودار تابع با محور طولها به شکل زیر است.

$$C(۳+۲\sqrt{۳},۰) \quad \text{و} \quad B(۳-۲\sqrt{۳},۰)$$

توجه :

۱ : اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای x در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور عرضها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور عرض ها را قطع نمی کند.

۲ : اگر معادله‌ی بدست آمده از جایگزینی صفر به جای y در معادله‌ی دایره، دارای یک ریشه باشد، دایره بر محور طولها مماس است و اگر ریشه نداشته باشد، دایره محور طولها را قطع نمی کند.

تمرین برای حل :

۱ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $(-۱,-۲)$ مرکز و اندازه‌ی شعاع آن ۳ باشد.

۲ : در تمرین قبل مختصات نقطه‌ی برخورد نمودار دایره با محورهای مختصات را به دست آورید.

۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات باشد و شعاع آن برابر $\sqrt{۳}$ باشد.

۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,۰)$ و از نقطه‌ی $(-۲,۱)$ بگذرد.

۵ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(۲,۳)$ و نقطه‌ی $(-۳,-۹)$ نقطه ای از آن باشد.

۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن $(-۲,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y-۳=۰$ مماس باشد.

۷ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که نقاط $A(-۶,۳)$ و $B(۲,۵)$ دو سر قطری از آن باشند.

۸ : نمودار دایره به معادله‌ی زیر را رسم کنید.

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۹$$

***

معادله‌ی گسترده‌ی دایره

معادله‌ی دایره را می توان به شکل زیر نوشت.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

این صورت از معادله‌ی دایره را معادله‌ی گسترده یا معادله‌ی ضمنی دایره می نامند.

توجه داشته باشید که اگر معادله ای $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ به شکل معلوم باشد. این معادله به شرطی معادله‌ی دایره است که

الف) ضرایب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشند.(یا مساوی باشند.)

ب) معادله شامل جمله‌ی xy نباشد.

ج) مقدار $\Delta=a^۲+b^۲-۴c$ مثبت باشد.

با این شرایط معادله‌ی گسترده‌ی دایره به معادله‌ی استاندارد تبدیل می شود.

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰\to(x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})+(y^۲+by+\frac{b^۲}{۴})-\frac{a^۲}{۴}-\frac{b^۲}{۴}+c=۰$$

$$\to(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

$$\to(x-(-\frac{a}{۲}))^۲+(y-(-\frac{b}{۲}))^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

با توجه به معادله‌ی بدست آمده داریم:

مختصات مرکز دایره $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$

اندازه‌ی شعاع دایره $R=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

مثال: معادله‌ی زیر داده شده است.

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

الف) نشان دهید که این معادله، معادله‌ی یک دایره است.

ب) مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را بدست آورید. (به دو روش حل کنید.)

ج) نمودار دایره را رسم کنید.

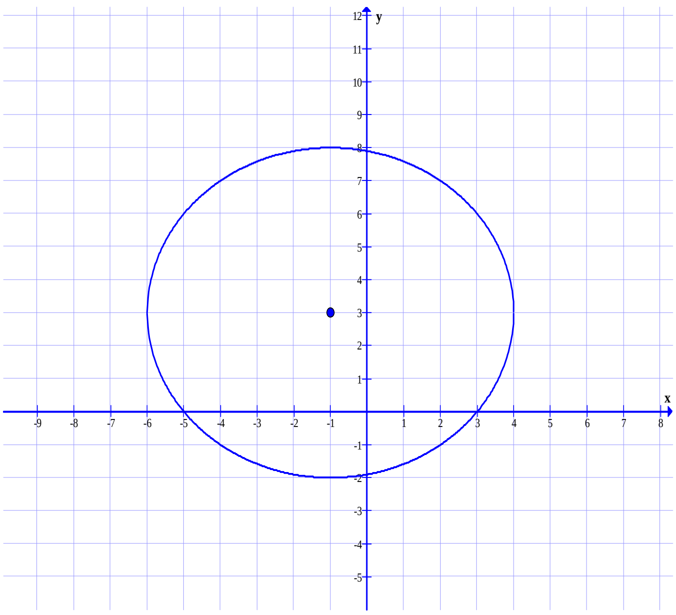
حل :

$$x^2+y^2+2x-6y-15=0$$

$$\to x^2+2x+1+y^2-6y+9=15+1+9 \to (x+1)^2+(y-3)^2=25$$

و این معادله‌ی یک دایره است و $O(-1,3)$ مختصات مرکز و $R=\sqrt{25}=5$ اندازه‌ی شعاع آن است.

برای رسم نمودار دایره کافی است به مرکز $O(-1,3)$ دایره ای به شعاع $R=5$ را رسم شود.



توجه داشته باشید که می توان مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را به کمک فرمول های زیر نیز تعیین کرد.

$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \to O(-\frac{۲}{۲},-\frac{-۶}{۲}) \to O(-۱,۳)$$

$$R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{(۲)^۲+(-۶)^۲-۴(-۱۵)}}{۲}=\frac{\sqrt{۴+۳۶+۶۰}}{۲}=۵$$

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۰)$ و $B(۳,-۲)$ و $C(-۱,-۲)$ بگذرد.

حل: فرض می کنیم که مختصات مرکز دایره به صورت (α,β) باشد.

در این صورت واضح است که $OA=OB=OC=R$. لذا می توان نوشت:

$$OA=OB \to OA^۲=OB^۲ \to (۱-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲=(۳-\alpha)^۲+(-۲-\beta)^۲$$

$$\to ۱-۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۹-۶\alpha+\alpha^۲+۴+۴\beta+\beta^۲ \to \alpha-\beta=۳ \quad (۱)$$

$$OA=OC \to OA^۲=OC^۲ \to (۱-\alpha)^۲+(۰-\beta)^۲=(-۱-\alpha)^۲+(-۲-\beta)^۲$$

$$\to ۱-۲\alpha+\alpha^۲+\beta^۲=۱+۲\alpha+\alpha^۲+۴+۴\beta+\beta^۲ \to \alpha+\beta=-۱ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \to \begin{cases}\alpha-\beta=۳\\ \alpha+\beta=-۱\end{cases} \to \alpha=۱\ ,\ \beta=-۲$$

با این اطلاعات می توان شعاع دایره را نیز به دست آورد.

$$R=OA \to R=\sqrt{(۱-۱)^۲+(۰+۲)^۲}=\sqrt{۰+۴}=۲$$

اکنون معادله‌ی دایره را به صورت زیر می نویسیم.

$$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۴$$

تمرین برای حل :

۹ : مختصات مرکز و طول شعاع دایره ای به معادله‌ی زیر را به دست آورید.

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$$

۱۰ : کدام یک از روابط زیر معادله‌ی یک دایره است؟

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $x^{۲}+y^{۲}+۲x+۳y+۴=۰$

ج) $۲x^{۲}+۲y^{۲}-۳x+۴y-۲=۰$

۱۱ : حدود m را طوری به دست آورید که معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}-۳x+۵y+m=۰$ بتواند یک دایره باشد.

۱۲ : معادله‌ی $x^{۲}+y^{۲}+۲x+۲y=k$ در صورتی می تواند معادله‌ی یک دایره باشد که:

۱) $k>-۲$ ۲) $k=-۲$ ۳) $k<-۲$ ۴) $k\geq -۲$

۱۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۱۴ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که $O(۲,-۳)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

۱۵ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $۴x+۳y=۶$ بر آن مماس باشد.

۱۶ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که از نقاط $A(۱,۲)$ و $B(۳,۰)$ بگذرد و خط $y=۲x-۱$ شامل قطری از آن باشد.

۱۷ : معادله‌ی دایره ای به صورت زیر است.

$$x^{۲}+y^{۲}+۲x+۲y-۸=۰$$

الف) معادله‌ی این دایره را به صورت استاندارد بنویسید.

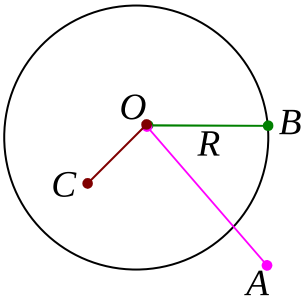
ب) مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع آن را بدست آورید. (به دو روش حل کنید.)

ج) نمودار دایره را رسم کنید.

***

روش تعیین وضعیت یک نقطه و یک دایره

می دانیم که وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره می تواند یکی از حالت های زیر باشد.



الف : نقاط خارج دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع بزرگتر است. ($OA > R$)

ب : نقاط روی دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره برابر شعاع است. ($OB = R$)

ج : نقاط داخل دایره : فاصله‌ی این نقاط تا مرکز دایره از شعاع کوچکتر ($OC < R$)

برای تعیین وضعیت یک نقطه نسبت به یک دایره، ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین نموده و به دنبال آن فاصله این نقطه تا مرکز دایره را بدست آورده و با شعاع دایره مقایسه می کنیم.

مثال: وضعیت هر یک از نقاط $A(-۱,-۱)$ و $B(۱,-۲)$ و $C(۲,۳)$ و $D(۴,-۱)$ را نسبت به دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$ تعیین کنید.

حل :

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۵ = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} O(۱,-۲) \\ R = \dfrac{\sqrt{(-۲)^۲ + (۴)^۲ - ۴(-۵)}}{۲} = \dfrac{\sqrt{۴+۱۶+۲۰}}{۲} = \dfrac{۲\sqrt{۱۰}}{۲} = \sqrt{۱۰} \end{cases}$$

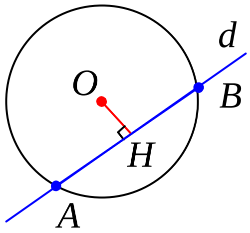
$$AO = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۲+۱)^۲} = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵}$$

و چون $AO < R$ پس نقطه‌ی A داخل دایره است. سایر نقاط را بررسی کنید.

***

روش تعیین وضع نسبی یک خط و یک دایره

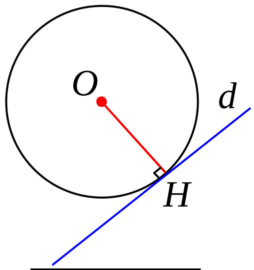
خط و دایره نسبت به هم دارای سه حالت زیر هستند.



$OH < R$

۱ . خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند. (متقاطع)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است و برعکس

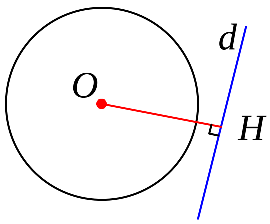


$OH = R$

۲ . خط و دایره یک نقطه‌ی مشترک دارند. (مماس)

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است و برعکس

نتیجه: شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر آن دایره عمود است.



$OH > R$

۳ . خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترک ندارند.

در این حالت فاصله‌ی مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است و برعکس

برای تعیین وضعیت نسبی یک خط و یک دایره با معادلات معلوم ، دو روش وجود دارد.

روش اوّل : معادله‌ی خط را بر حسب یک متغیر مانند x نوشته و در معادله‌ی دایره جایگزین می کنیم. سپس معادله‌ی درجه‌ی دوّم بدست آمده را حل می کنیم. در انتها یا ریشه های بدست آمده را در معادله‌ی خط جایگزین کرده تا مختصات نقاط تقاطع خط و دایره بدست آید.

توجه کنید که تعداد ریشه های معادله‌ی درجه‌ی دوّم تشکیل شده برابر تعداد نقاط تقاطع خط و دایره است.

روش دوّم : معادله‌ی دایره را به صورت استاندارد نوشته و مختصات مرکز و طول شعاع آن را تعیین می کنیم. سپس فاصله‌ی مرکز را تا خط داده شده بدست می آوریم. با توجه به این فاصله و اندازه‌ی شعاع ، وضعیت خط و دایره مشخص می شود.

توجه : اگر $O(\alpha,\beta)$ مختصات مرکز دایره باشد. فاصله‌ی مرکز دایره تا خط به معادله‌ی

$ax+by+c=0$ بدین شکل بدست می آید.

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

مثال: وضعیت خط به معادله‌ی $x+y=4$ و دایره‌ی $x^2+y^2-2x-3y-3=0$ را تعیین کنید.

حل :

روش اوّل :

$$x+y=4\to y=4-x$$

$$x^2+y^2-2x-3y-3=0\to x^2+(4-x)^2-2x-3(4-x)-3=0$$

$$\to x^2+16-8x+x^2-2x-12+3x-3=0\to 2x^2-7x+1=0$$

$\xrightarrow{\Delta=49-4(2)(1)=41}$ خط و دایره دو نقطه‌ی برخورد دارند.

روش دوّم :

$$x^2+y^2-2x-3y-3=0\to\begin{cases}O(1,\frac{3}{2})\\ R=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2-4(-3)}}{2}=\frac{\sqrt{4+9+12}}{2}=\frac{5}{2}\end{cases}$$

اکنون فاصله‌ی مرکز دایره تا خط $x+y=4$ را تعیین می کنیم.

$$d=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1(1)+1(\frac{3}{2})-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

و چون $R>d$ پس خط و دایره، دو نقطه‌ی تقاطع دارند.

تمرین برای حل :

۱۸ : وضعیت هر یک از خطوط و دایره های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

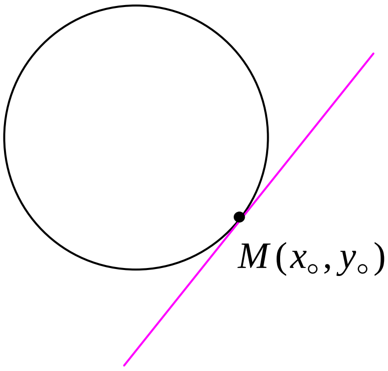
الف) $3x+4y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

ب) $x+y=2$ و $x^2+y^2=2$

ج) $x+y=1$ و $x^2+y^2-2x-2y=2$

***

روش تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره از یک نقطه‌ی روی آن



برای تعیین معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی

$$(x-\alpha)^{۲}+(y-\beta)^{۲}=R^{۲}$$

در نقطه‌ی $M(x_\circ, y_\circ)$ واقع بر روی دایره از فرمول زیر استفاده می کنیم. بدیهی است که این فرمول از معادله‌ی استاندارد دایره و شیب شعاع گذرا از نقطه‌ی تماس بدست می آید[1].

$$\boxed{(x_\circ-\alpha)(x-\alpha)+(y_\circ-\beta)(y-\beta)=R^{۲}}$$

مثال : معادله‌ی خط مماس بر دایره به معادله‌ی زیر از نقطه‌ی $A(۶,۱)$ را بنویسید.

$$x^{۲}+y^{۲}-۶x+۸y=۹$$

حل : ابتدا مختصات مرکز و شعاع دایره را تعیین می کنیم.

$$x^{۲}+y^{۲}-۶x+۸y=۹ \rightarrow x^{۲}-۶x+۹+y^{۲}+۸y+۱۶=۹+۹+۱۶$$

$$\rightarrow (x-۳)^{۲}+(y+۴)^{۲}=۳۴$$

$\rightarrow O(۳,-۴)$ مرکز دایره $\qquad\qquad$ $R=\sqrt{۳۴}$ اندازه‌ی شعاع دایره

از طرفی چون مختصات نقطه در دایره صدق می کند، پس نقطه روی دایره است.

$$(x-۳)^{۲}+(y+۴)^{۲}=۳۴ \xrightarrow{A(۶,۱)} (۶-۳)^{۲}+(۱+۴)^{۲}=۳۴ \rightarrow ۹+۲۵=۳۴$$

با این وضعیت، معادله‌ی خط مماس را می توان به یکی از روش های زیر به دست آورد.

روش اول : شیب خط گذرا (قطر) از نقاط A و O (مرکز دایره) را تعیین و عکس و قرینه می کنیم تا شیب خط مماس بدست آید (چرا؟). سپس معادله‌ی خط مماس را می نویسیم.

$$m_{AO}=\frac{-۴-۱}{۳-۶}=\frac{-۵}{-۳}=\frac{۵}{۳}$$

معادله‌ی خط مماس

$$y=m(x-x_\circ)+y_\circ$$

[1] . شعاع دایره در نقطه‌ی تماس بر خط مماس عمود است. پس شیب های آنها عکس و قرینه ی یکدیگرند.

$$y=(\frac{-۳}{۵})(x-۶)+۱ \rightarrow y=\frac{-۳}{۵}x+\frac{۱۸}{۵}+۱ \rightarrow y=\frac{-۳}{۵}x+\frac{۲۳}{۵} \rightarrow ۳x+۵y=۲۳$$

روش دوّم : می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد. این فرمول به همان روش قبل قابل اثبات است.

$$(x_{\circ}-\alpha)(x-\alpha)+(y_{\circ}-\beta)(y-\beta)=R^{۲}$$

$$\rightarrow (۶-۳)(x-۳)+(۱+۴)(y+۴)=۳۴$$

$$\rightarrow ۳x-۹+۵y+۲۰=۳۴ \rightarrow ۳x+۵y=۲۳$$

تمرین برای حل :

۱۹ : از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ روی دایره $x^{۲}+y^{۲}-۲x-۲y=۳$ مماسی بر آن رسم کرده ایم. معادله‌ی این خط مماس را به دست آورید.

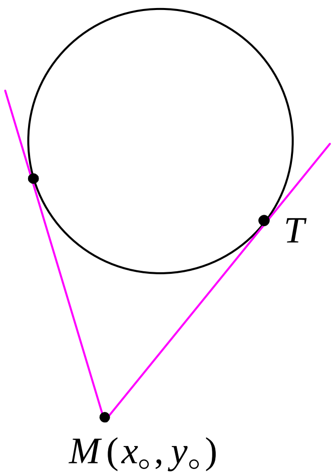
۲۰ : خطی در نقطه‌ی $(۳,۴)$ بر دایره ای به مرکز مبدأ مختصات مماس است. معادله‌ی این خط را بنویسید.

***

روش تعیین اندازه‌ی پاره خط محصور بین یک نقطه‌ی بیرون دایره و نقطه‌ی تماس

از یک نقطه‌ی بیرون دایره دو خط مماس بر دایره رسم می شود. اندازه‌ی پاره خط هایی از این دو خط مماس محصور بین این نقطه و نقطه‌ی تماس با یکدیگر برابر است. این اندازه به شکل زیر بدست می آید.

$$MT=\sqrt{(x_{\circ}-\alpha)^{۲}+(y_{\circ}-\beta)^{۲}-R^{۲}}$$



تمرین ۲۱ : اندازه‌ی خط مماسی که از نقطه‌ی $A(۲,۳)$ بر دایره به معادله‌ی زیر رسم می شود را بیابید.

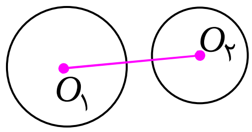
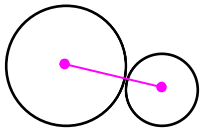
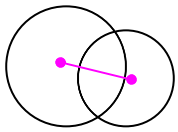
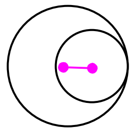
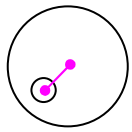
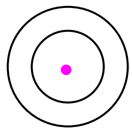
$$(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۲$$

***

روش تعیین وضع دو دایره نسبت به هم

دو دایره نسبت به هم حالت های متفاوتی دارند. برای تعیین وضع نسبی دو دایره، اندازه‌ی شعاع های آنها را با اندازه‌ی خط المرکزین مقایسه کنید. خط المرکزین پاره خطی است که مرکز های دو دایره را به هم وصل می کند.

اگر دایره‌ی C_1 به مرکز O_1 و شعاع R_1 و دایره‌ی C_2 به مرکز O_2 و شعاع R_2 و طول خط المرکزین دو دایره $d = O_1O_2$ باشد. با فرض اینکه $R_1 > R_2$ به کمک جدول زیر می توان حالت های مختلف دو دایره را تعیین کرد.

ردیف	حالت	رابطه	شکل نمونه
۱	دو دایره بیرون یکدیگرند.(متخارج)	$d > R_1 + R_2$	
۲	دو دایره مماس بیرونی اند.	$d = R_1 + R_2$	
۳	دو دایره متقاطع اند.	$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	
۴	دو دایره مماس درونی اند.	$d = R_1 - R_2$	
۵	دو دایره درون یکدیگرند.(متداخل)	$d < R_1 - R_2$	
۶	دو دایره هم مرکزند.	$d = 0$	

مجدداً تأکید می شود که برای تشخیص وضعیت دو دایره، ابتدا مختصات مرکز و شعاع های دو دایره‌ی داده شده را بدست می آوریم. در ادامه طول خط المرکزین را تعیین و با مجموع اندازه های دو شعاع مقایسه می کنیم.

مثال : وضع نسبی دو دایره به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۵ = ۰ \\ (x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \end{cases}$$

حل : ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع های دو دایره را تعیین می کنیم.

$$x^۲ + y^۲ + ۶x - ۲y + ۵ = ۰ \rightarrow O_۱(-۳,۱) \ \ , \ R_۱ = \frac{\sqrt{۳۶+۴-۲۰}}{۲} = \sqrt{۵}$$

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴ \ \ \rightarrow O_۲(۱,-۲) \ \ \ , \ \ \ R_۲ = ۲$$

اکنون اندازه‌ی خط المرکزین را بدست آورده و با اندازه‌ی شعاع ها (مجموع یا تفاضل) مقایسه می کنیم.

$$d = O_۱O_۲ = \sqrt{(۱+۳)^۲ + (-۲-۱)^۲} = \sqrt{۱۶+۹} = ۵$$

و چون $R_۱ + R_۲ < d$ پس دو دایره متخارج هستند.

مثال : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(-۱,۱)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$$

مماس بیرونی باشد.

حل : ابتدا مختصات مرکز و اندازه‌ی شعاع دایره را تعیین و سپس اندازه‌ی خط المرکزین را محاسبه می کنیم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ + y^۲ + ۲y + ۱ = ۲$$

$$\rightarrow (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ \rightarrow \begin{cases} O_۲(۱,-۱) \\ R_۲ = \sqrt{۲} \end{cases}$$

$$d = O_۱O_۲ = \sqrt{(۱+۱)^۲ + (-۱-۱)^۲} = \sqrt{۴+۴} = ۲\sqrt{۲}$$ اندازه‌ی خط المرکزین

اکنون چون دو دایره مماس بیرونی هستند، پس طول خط المرکزین برابر مجموع دو شعاع است. یعنی

$$d = R_۱ + R_۲ \rightarrow ۲\sqrt{۲} = R_۱ + \sqrt{۲} \rightarrow R_۲ = \sqrt{۲}$$

و با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع، معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر به دست می آید.

$$(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$$

تمرین برای حل :

۲۲ : در هر مورد وضع نسبی دو دایره به معادلات داده شده را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases}(x-5)^2+(y-7)^2=1\\(x-2)^2+(y-3)^2=16\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x^2+y^2-4x-6y-3=0\\x^2+y^2-10x-14y+73=0\end{cases}$

پ) $\begin{cases}x^2+y^2-2x=1\\x^2+y^2=1\end{cases}$

ت) $\begin{cases}x^2+y^2=9\\x^2+y^2-2x+2y+1=0\end{cases}$

ث) $\begin{cases}x^2+y^2=4\\x^2+y^2-8x-4y+19=0\end{cases}$

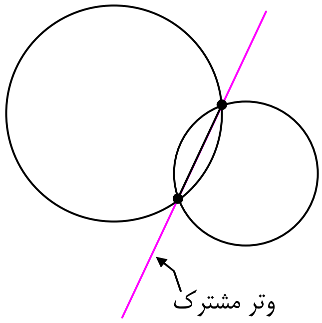
۲۳ : معادله‌ی دایره ای را بنویسید که مرکز آن نقطه‌ی $O(0,1)$ بوده و بر دایره به معادله‌ی

$$x^2+y^2-4x-6y=3$$

مماس داخلی باشد.

***

روش تعیین وتر مشترک دو دایره ی متقاطع



وتر مشترک دو دایره خطی است که از محل تقاطع دو دایـره بگـذرد. بـرای تعیین معادله‌ی این خط، معادلات دو دایره در حالت گسترده را نظیر به نظیر از هم کم می کنیم[2]. در این صورت داریم:

معادله‌ی دایره‌ی اوّل $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

معادله‌ی دایره‌ی دوّم $x^۲+y^۲+a'x+b'y+c'=۰$

$$\rightarrow (x^۲+y^۲+ax+by+c)-(x^۲+y^۲+a'x+b'y+c')=۰$$

$$\Rightarrow (a-a')x+(b-b')y+(c-c')=۰$$

لذا معادله‌ی وتر مشترک به شکل زیر در خواهد آمد.

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=۰$$

مثال : معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به معادلات زیر را بدست آورید.

$$x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰ \quad \text{و} \quad x^۲+y^۲-۴x-۶y=۱۴$$

حل :

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+۶x+۸y=۰ \\ x^۲+y^۲-۴x-۶y=۱۴ \end{cases} \rightarrow (۶+۴)x+(۸+۶)y=(۰-۱۴) \rightarrow ۱۰x+۱۴y=-۱۴$$

معادله‌ی وتر مشترک $\xrightarrow{\div ۲} ۵x+۷y=-۷$

***

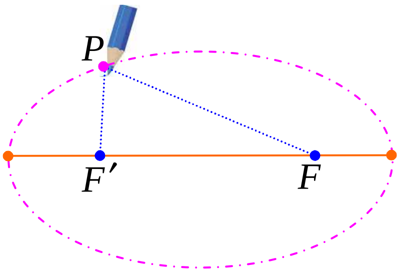
تهیه کننده : جابرعامری عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه استان خوزستان

[2] . دلیل این کار این است که پس از تشکیل دستگاه و تعیین نقاط تقاطع دو دایره، معادله‌ی خط گذرا از نقاط تقاطع را می نویسیم.

درس سوّم : بیضی

در این قسمت بیضی را به عنوان یکی از مهمترین مقاطع مخروطی، تعریف می کنیم و در ادامه ویژگی های آن را به صورت هندسی بررسی می کنیم.

بیضی

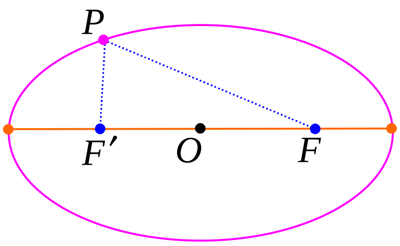


یک تکه نخ به طول l را در نظر بگیرید. اگر دو سر این تکه نخ را مطابق شکل در دو نقطه‌ی متمایز F و F' ثابت کنید و $l > FF'$ باشد. در این صورت یک مداد را مانند شکل داخل نخ کنید و منحنی ای به گونه ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل منحنی بسته ای خواهد بود که **بیضی** نام دارد.

واضح است که اگر یک نقطه‌ی دلخواه روی بیضی رسم شده را در نظر بگیریم، مجموع فاصله های این نقطه از دو نقطه‌ی ثابت F و F' برابر همان طول نخ است. یعنی $PF + PF' = l$

تعریف بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه ، که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد، را **بیضی** می نامند.

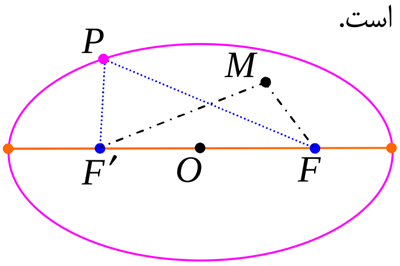


دو نقطه‌ی ثابت را کانون های بیضی می نامند و آنها را با F و F' نمایش می دهیم. همچنین نقطه‌ی وسط پاره خط FF' را مرکز بیضی می گویند که در شکل مقابل با O نمایش داده شده است.

با توجه به این تعریف واضح است که اگر P یک نقطه روی بیضی باشد. در این صورت $PF + PF' = l$

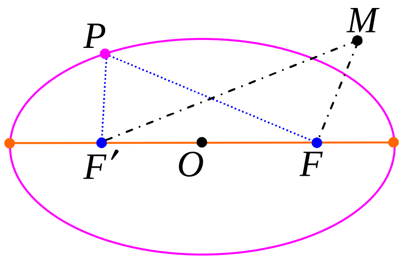
توجه داشته باشید که :

الف : مجموع فاصله های هر نقطه درون بیضی تا کانون ها از l کمتر است.



$$MF + MF' < l$$

ب : مجموع فاصله های هر نقطه بیرون بیضی تا کانون ها از l بیشتر است.



$$MF + MF' > l$$

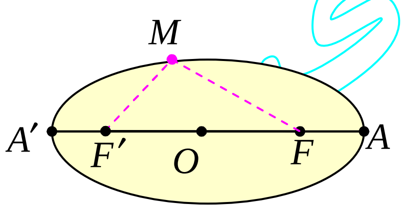
نتیجه : اگر l طول تکه نخ اشاره شده در فوق باشد و چون طول یک پاره خط مانند l یک عدد حقیقی مثبت است. لذا شایسته است تعریف بیضی را به شکل زیر بیان کنیم.

بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله های آنها از دو نقطه‌ی ثابت یک عدد حقیقی مثبت باشد. اگر این عدد حقیقی مثبت را به دلایلی که بعد با آنها آشنا می شویم با $2a$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$PF + PF' = 2a$$

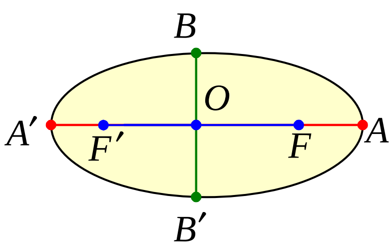
پس همواره $l = 2a$ می باشد به همین دلیل است که عدد $2a$ را **ثابت بیضی** می نامند.

اجزای بیضی



بیضی مقابل را در نظر بگیرید. اگر نقاط F و F' کانون های بیضی و نقطه‌ی M روی بیضی باشد. در این صورت پاره خط هـای MF و MF' را **شعاع های حامل** نقطه‌ی M می نامند.

اگر کانونهای بیضی را به هم وصل کرده و امتداد دهیم، خط بدست آمده بیضی را در نقاط A و A' قطع می کند. پاره خط AA' را **قطر بزرگ** (قطر کانونی) بیضی می نامند و نقـاط A و A' را **رأس های قطر بزرگ** می گویند.

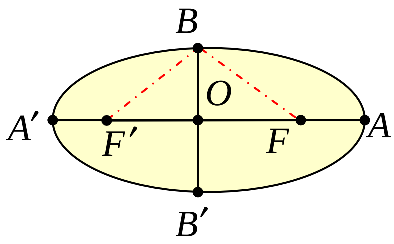


$FF' = 2c$ فاصله‌ی کانونی

اگر وسط پاره خط واصل دو کانون بیضی یعنی FF' را O بنامیم. نقطه‌ی O را **مرکز بیضی** می گویند.

اندازه‌ی پاره خط واصل کانونهای بیضی را **فاصله‌ی کانونی** بیضی می گویند.

اگر از مرکز بیضی بر قطر بزرگ خط عمودی رسم کنیم. این خط عمود بیضی را در دو نقطه‌ی B و B' قطع می کند. پاره خط BB' را **قطر کوچک** (قطر ناکانونی) بیضی می نامند و نقاط B و B' را **رأس های قطر کوچک** می گویند. طبق تعریف بیضی واضح است که مجموع فاصله‌ی های هر رأس قطر کوچک بیضی تا کانونها برابر ثابت بیضی یعنی $۲a$ می باشد. یعنی



$$BF + BF' = ۲a \quad \text{و} \quad B'F + B'F' = ۲a$$

برای سادگی در ادامه‌ی کار، اندازه‌ی پاره خط های OA و OB و OF را به ترتیب با a و b و c نمایش می دهیم، لذا فاصله‌ی کانونی بیضی برابر $۲c$ است و

$$FF' = ۲c \text{ و } OF = c \text{ و } OF' = c$$

تمرین ۱۱ : ثابت کنید که در هر بیضی فاصله‌ی رأس قطر بزرگ بیضی تا کانون مجاور به آن، برابر فاصله-ی رأس دیگر تا کانون مجاور به آن است. یعنی $AF = A'F'$

اثبات : با توجه به تعریف بیضی واضح است که $AF + AF' = l$ و $A'F + A'F' = l$ لذا

$$AF + AF' = A'F + A'F'$$

$$\xrightarrow{AF' = AF + FF',\ A'F = A'F' + FF'} AF + AF + FF' = A'F' + FF' + A'F'$$

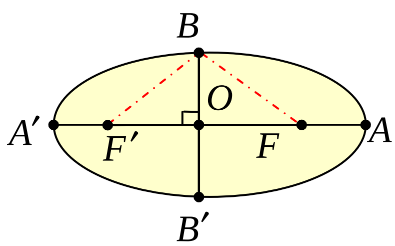
$$\rightarrow ۲\,AF = ۲A'F' \rightarrow AF = A'F'$$

نتیجه : با توجه به تمرین فوق نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر بزرگ آن است. یعنی $OA = OA'$ می باشد و چون $OA = a$ پس:

$$AA' = ۲a \text{ و } OA = a \text{ و } OA' = a$$

تمرین۱۳ : ثابت کنید که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک است.

اثبات : با توجه به تعریف قطر کوچک بیضی و چون $OF = OF' = c$. پس در مثلث BFF' پاره خط OB



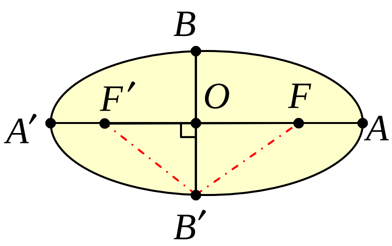
عمود منصف FF' می باشد. لذا $BF = BF'$ و از آنجا که $BF = BF' = a$ پس $BF = BF'$

از طرف در مثلث قائم الزاویه‌ی BOF (یا BOF') می توان نوشت:

$$BF^2 = OB^2 + OF^2$$

و چون $BF = a$ و $OB = b$ و $OF = c$ پس :

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (*)$$



اکنون بطور مشابه در مثلث $B'FF'$ نیز خواهیم داشت.

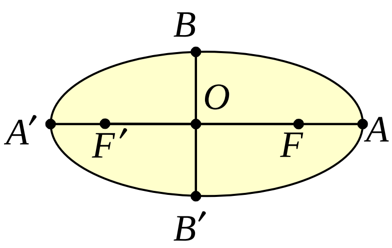
$BF = BF'$ و لذا $a^2 = OB' + c^2$ و با مقایسه با تساوی $(*)$ نتیجه می شود که $OB' = b$

و لذا نتیجه می شود که مرکز بیضی نقطه‌ی وسط قطر کوچک آن است. یعنی $OB = OB'$ می باشد و همچنین:

$$OB' = b \text{ و } OB = b \text{ و } BB' = 2b$$

***

تذکر۱ : هر بیضی دارای دو قطر می باشد که یکی از دو کانون گذشته و دیگری عمود بر آن در مرکز بیضی است. قطری که از دو کانون می گذرد را قطر بزرگ (اطول) یا قطر کانونی می نامند و آنرا با $2a$ نمایش می دهند و قطر دیگر را قطر کوچک (اقصر) یا ناکانونی می گویند و آنرا با $2b$ نمایش می دهند.



قطر بزرگ $AA' = 2a$

قطر کوچک $BB' = 2b$

فاصله‌ی کانونی $FF' = 2c$

اگر فاصله‌ی بین دو کانون را با $2c$ نمایش دهیم. نتیجه می شود که در هر بیضی رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$b^2 + c^2 = a^2$$

تذکر۲ : واضح است که در هر بیضی فاصله‌ی کانونی از قطر بزرگ کوچکتر است پس:

$$FF' < AA' \to 2c < 2a \to c < a \to \frac{c}{a} < 1$$

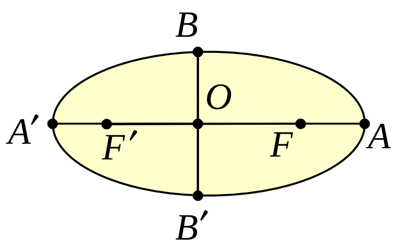
نسبت $\frac{c}{a}$ را **خروج از مرکز بیضی** می نامند و آنرا با e نمایش می دهند.

$$e=\frac{c}{a}<1$$

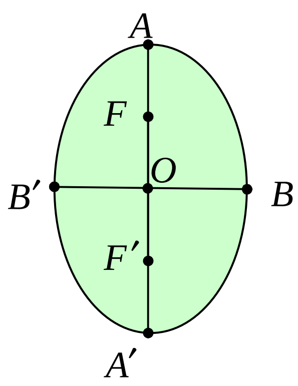
در واقع خروج از مرکز بیضی نشان دهنده‌ی کشیدگی بیضی است.اگر e به صفر نزدیکتر باشد، بیضی به دایره شبیه تر است و اگر e به یک نزدیک شود، بیضی کشیده تر است.

تذکر۳ : قطر های بیضی **محور های تقارن** و مرکز بیضی **مرکز تقارن** آن است.

تذکر۴ : اگر قطر بزرگ بیضی موازی محور طول ها باشد، بیضی را **افقی** و اگر قطر بزرگ موازی محور عرض ها باشد، بیضی را **قائم** می نامند.



بیضی افقی



بیضی قائم

***

تمرین۱۴ : اندازه‌ی قطرهای یکی بیضی۱۰ و ۶ سانتی متر می باشد. اندازه‌ی فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

حل : واضح است که اندازه‌ی قطر بزرگ ۱۰ و اندازه‌ی قطر کوچک برابر ۶ سانتی متر می باشد.

$$AA'=10\to 2a=10\to a=5$$

$$BB'=6\to 2b=6\to b=3$$

$$a^2=b^2+c^2\to 25=c^2+9\to c^2=16\to c=4$$

$$FF'=2c=2(4)=8$$ فاصله‌ی کانونی

خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$

تمرین۱۵ : در یک بیضی طول قطر ها ۸ و۶ واحد بوده و مرکز بیضی روی مبدأ مختصات می باشد.

الف : خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

ب : معادلات دایره های محاطی و محیطی بیضی را بنویسید.

حل : الف : ابتدا معادله را به صورت استاندارد می نویسیم.

طول قطر بزرگ $AA'=۲a \rightarrow a=۴$

طول قطر کوچک $BB'=۲b=۶ \rightarrow b=۳$

$a^۲=b^۲+c^۲ \rightarrow ۱۶=۹+c^۲ \rightarrow c=\sqrt{۷}$

خروج از مرکز بیضی $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۷}}{۴}$

ب : دایره‌ی محیطی بیضی دایره ای است همرکز بیضی و به شعاع a است. دایره‌ی محاطی بیضی دایره ای است همرکز بیضی و به شعاع b است. با این تعریف داریم :

معادله‌ی دایره‌ی محیطی $(x-۰)^۲+(y-۰)^۲=۱۶$

معادله‌ی دایره‌ی محاطی $(x-۰)^۲+(y-۰)^۲=۹$

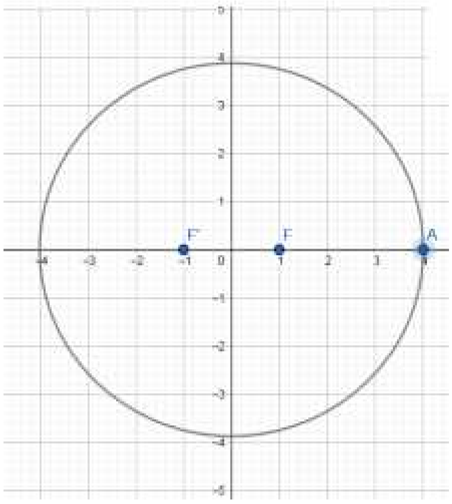
تمرین ۱۶ : با توجه به اطلاعات داده شده، در هر مورد نمودار بیضی را طوری رسم کنید که مرکز بیضی بر مبدأ مختصات منطبق بوده و قطر بزرگ آن روی محور طول ها باشد. با توجه به اندازه‌ی خروج از مرکز بیضی چه نتیجه ای می گیرید.

الف : $c=۱$ و $a=۴$ و $e=\frac{۱}{۴}$

ب : $c=۳$ و $a=۴$ و $e=\frac{۳}{۴}$

حل : الف:

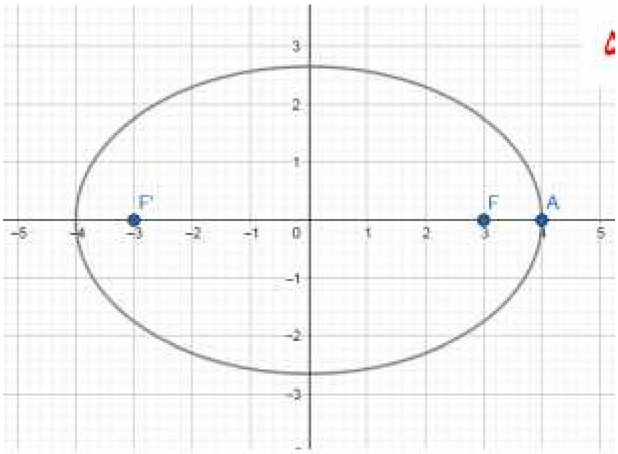
$$e=\frac{۱}{۴} \rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{a=۴} \frac{c}{۴}=\frac{۱}{۴} \rightarrow c=۱ \xrightarrow{a^۲=b^۲+c^۲} b^۲=۱۵ \rightarrow b=\sqrt{۱۵}$$



بیضی به دایره شبیه است.

ب :

$$e=\frac{۳}{۴}\to\frac{c}{a}=\frac{۳}{۴}\xrightarrow{a=۴}\frac{c}{۴}=\frac{۳}{۴}\to c=۳\xrightarrow{a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}}b^{۲}=۷\to b=\sqrt{۷}$$



بیضی کشیده تر است.

***

تمرین برای حل :

۱۷ : در یک بیضی، طول قطر بزرگ ۸ و فاصله‌ی کانونی۶ می باشد. اندازه‌ی قطر کوچک بیـضی را تعیـین کنید.

۱۸ : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۱۰ و طول قطر کوچک ۶ می باشد.

الف : اندازه‌ی فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.

ب : مقدار خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

۱۹ : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف : با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور طول ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب : فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج : مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون های بیضی را بنویسید.

۲۰ : در یک بیضی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک برابر ۴ واحد و مختصات مرکز بیضی (۴,۵) باشد. در این صورت:

الف : با فرض اینکه قطر بزرگ بیضی موازی محور عرض ها باشد، نمودار بیضی را رسم کنید.

ب : فاصله‌ی کانونی و مقدار خروج از مرکز بیضی را محاسبه کنید.

ج : مختصات رئوس بیضی قطر بزرگ و رئوس قطر کوچک و کانون های بیضی را بنویسید.

۲۱ : کانون های یک بیضی نقاط (۱,۳)و (۱,۵−) است.

الف : افقی یا قائم بودن بیضی را تعیین کنید.

ب : فاصله‌ی کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله ی قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ج : اگر طول قطر بزرگ این بیضی۱۲ باشد، اندازه‌ی قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

۲۲ : نقاط F(۲,۷) و F'(۲,۱−) کانون های بیضی هستند که طول قطر بزرگ آن ۱۰ می باشد.

الف : مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب : طول قطر کوچک بیضی را به دست آورید.

ج : نمودار بیضی را رسم کنید.

۲۳ : خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$ و مختصات مرکز آن $(-۱,-۴)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف : طول قطر کانونی و فاصله‌ی کانونی را محاسبه کنید.

ب : مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون های بیضی را پیدا کنید.

۲۴ : در یک بیضی طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است، خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

***

تهیه کننده : جابر عامری

عضو گروه ریاضی دوره ی دوم متوسطه

استان خوزستان