فصل ۲ احتمال

درس ۳ احتمال شرطی

فعالیت صفحه ۵۲

۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهٔ کارت اکبر ۱۵ و شمارهٔ کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید: «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

$\frac{۱}{۲۰}$ $\frac{۱}{۲۰}$ $\frac{۱}{۱۱}$ ۰

۲ در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ــ۱۱، ۲ــ۱۱ و ۳ــ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه که شامل همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم است، چند عضوی است؟

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمرهٔ کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

$n(S)=۱۰۰$ $۳۵+۳۳+۳۲=۱۰۰$ عضو

$n(A)=۸+۹+۶=۲۳$ $p(A)=\frac{۲۳}{۱۰۰}$

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمرهٔ کامل شده باشد؟

در حلّ قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز

$n(B)=۳۲ \longrightarrow P(B)=\frac{۳۲}{۱۰۰}$

۳۲ نفر ۸ نفر نمره کامل

احتمال مورد نظر $= \frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}$

پایهٔ یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، به فضای نمونهٔ دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد $A \cap B$ را بشماریم. نتیجه را باید به تعداد اعضای مجموعهٔ B تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ پرسیده شد، از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲ که پیشامد A «کسب نمرهٔ کامل» و B «دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمرهٔ کامل به شرط دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» است که با $P(A|B)$ نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس

صفحه ۵۳

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

P (برنده شدن اکبر | برنده شدن عدد ۲ رقمی)

P (برنده شدن بهرام | برنده شدن عدد ۲ رقمی)

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

کار در کلاس

صفحه ۵۳

فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

A $\qquad$ B

الف) $n(S)=6\times 6=36$ هم‌شانس

ب)

$$B=\left\{\begin{matrix} (4,6),(5,5),(5,6) \\ (6,4)(6,5)(6,6) \end{matrix}\right\}$$

S جدید

$A=\{$اعضایی که زیر آنها خط کشیده‌ام$\}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\underset{\text{جدید}}{S})}=\frac{5}{6}$$

فعالیت

صفحه ۵۴

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(S)}{n(B)/n(S)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

کافی است هر ۲ را به $n(S)$ تقسیم کنیم

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

کار در کلاس صفحه ۵۵

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱ـ۱۱، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» را B_1 می‌نامیم و B_2 و B_3 را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

$P(A)=\frac{۲۳}{۱۰۰}$

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید.

ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟

پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟ قسمت الف

کلاس ۲ـ۱۱ ←

الف)

$$P(A|B_1)=\frac{P(A\cap B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{۸}{۱۰۰}}{\frac{۳۲}{۱۰۰}}=\frac{۸}{۳۲}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$$

$$P(A|B_2)=\frac{\frac{۹}{۱۰۰}}{\frac{۳۳}{۱۰۰}}=\frac{۹}{۳۳}=۰/۲۷$$

$$P(A|B_3)=\frac{\frac{۶}{۱۰۰}}{\frac{۳۵}{۱۰۰}}=\frac{۶}{۳۵}=۰/۱۷$$

ب)

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{۸}{۱۰۰}}{\frac{۲۳}{۱۰۰}}=\frac{۸}{۲۳}=۰/۳۴$$

$$P(B_2|A)=\frac{\frac{۹}{۱۰۰}}{\frac{۲۳}{۱۰۰}}=\frac{۹}{۲۳}=۰/۳۹$$

$$P(B_3|A)=\frac{\frac{۶}{۱۰۰}}{\frac{۲۳}{۱۰۰}}=\frac{۶}{۲۳}=۰/۲۶$$

کار در کلاس صفحه ۵۶

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :

الف) اگر A_1 و A_2 دو پیشامد ناسازگار باشند : $P((A_1 \cup A_2)|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$ *

توجه: $(A_1 \cap B)$ و $(A_2 \cap B)$ هم ناسازگارند

ب) برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B)=1-P(A|B)$.

الف

A_1, A_2 ناسازگارند $\longrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$ تهی

$$P((A_1 \cup A_2)|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}$$ با توجه به *

$$= \frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

ب)

$$P(A'|B) = \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B-A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B)$$

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبهٔ ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود :

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A)>0$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

مثال : در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است.

کار در کلاس صفحه ۵۷

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اوّلی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

قسمتی از راه‌حل، مشابه مثال قبلی است. کافی است C را پیشامد قرمز بودن گوی سوم بگیریم. در این صورت، باید $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد، راه‌حل را ادامه دهید.

P(سبز بودن اولی) $= \frac{1}{6}$

P(سفید بودن دومی | سبز بودن اولی) $= \frac{3}{5}$

P(قرمز بودن سومی | سبز بودن اولی و سفید بودن دومی) $= \frac{2}{4}$

$$P(\underbrace{A\cap B}_{x}\cap C) = p(x)\times p(C|x) = p(A)\times p(B|A)\times p(C|A\cap B)$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4} = \frac{1}{20}$$

$$p(x) = p(A\cap B)$$
$$= p(A)\times p(B|A)$$

محرم مهدی

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

کار در کلاس .... صفحه ۵۷

تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال با ویلچر کشورمان در بازی‌های پارالمپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳، تیم آلمان را شکست داد.

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد گُل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به‌علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اوّلین پرتاب، روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

برای حلّ این مسئله، پیشامد گل شدن پرتاب iاُم را A_i بنامید. آنچه باید محاسبه کنید $P(A'_1\cap A_2\cap A_3)$ است.

با استفاده از فرضیات مسئله و قانون ضرب احتمال داریم :

$$P(A'_1\cap A_2\cap A_3)=P(A'_1)P(A_2|A'_1)P(A_3|A'_1\cap A_2)=0/1\times 0/6\times 0/9=0/054$$

چرا $P(A_3|A'_1\cap A_2)$ برابر ۰/۹ است؟

یعنی پرتاب اول گل نشود و پرتاب دوم و سوم گل شود
A_1 A_2 A_3

$p(A_1)=0/9 \longrightarrow p(A'_1)=1-0/9=0/1$

A_1 گل نشده ⟶ پرتاب دوم با روحیه ضعیف $\Rightarrow p(A_2|A'_1)=0/6$

A_2 گل شده ⟶ پرتاب سوم با روحیهٔ خوب $\Rightarrow p(A_3|A'_1\cap A_2)=0/9$

قانون احتمال کل

فعالیت صفحه ۵۸

دو کیسه داریم که اوّلی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A، B_1 و B_2 را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

A : گوی برداشته شده سفید است.

B_1 : کیسهٔ اول انتخاب شده است.

B_2 : کیسهٔ دوم انتخاب شده است.

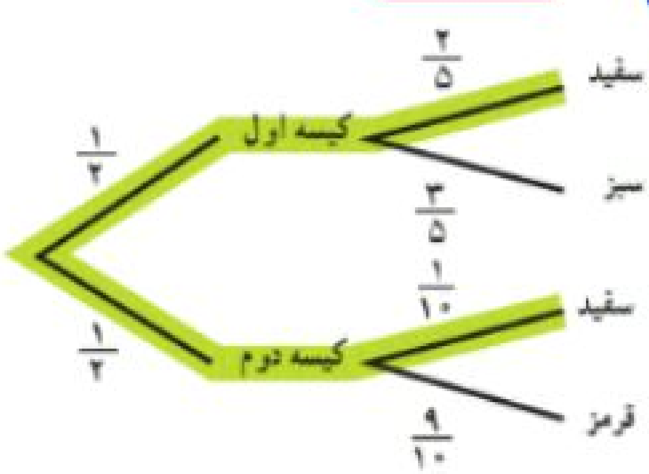
پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A|B_1), P(A|B_2)$، به‌ترتیب، برابر $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{10}$ هستند. به‌علاوه، واضح است که $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$. چون کیسهٔ انتخابی یا کیسهٔ اول است یا کیسهٔ دوم. پس B_1 و B_2 فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A\cap B_1$ و $A\cap B_2$ نیز A را افراز می‌کنند. پس

$$P(A) = P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)) = P(A\cap B_1) + P(A\cap B_2)$$

$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

راه دوم : استفاده از نمودار درختی

در محاسبات صفحهٔ قبل دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده کردیم. «کجا؟» نمودار درختی زیر، محاسبات را به شکل دیگری نمایش می‌دهد:

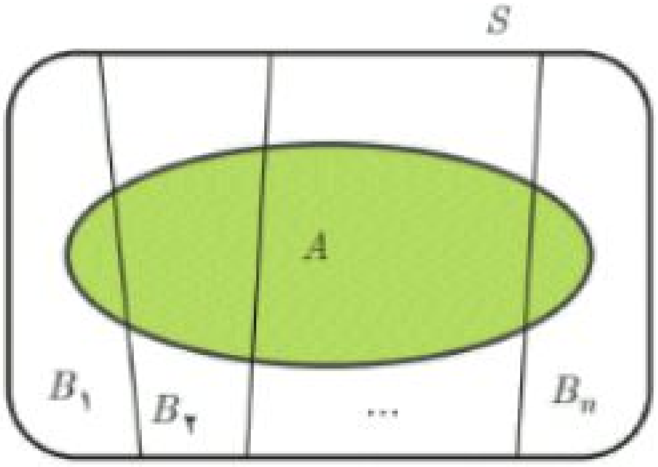


$$\left.\begin{array}{l} \text{سفید}: \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} \\ \\ \text{سفید}: \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{10} = \frac{2}{10} + \frac{1}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

محرم مهدی

کار در کلاس صفحه ۵۹

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :



۱ این فرض که B_1، B_2، و ... B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو جدا از هم هستند و $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = S$.

۲ در این صورت $A\cap B_1$، $A\cap B_2$، و ... $A\cap B_n$ دو به دو جدا از هم هستند و اجتماع آنها برابر A می‌شود. در نتیجه داریم

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A\cap B_k)$$

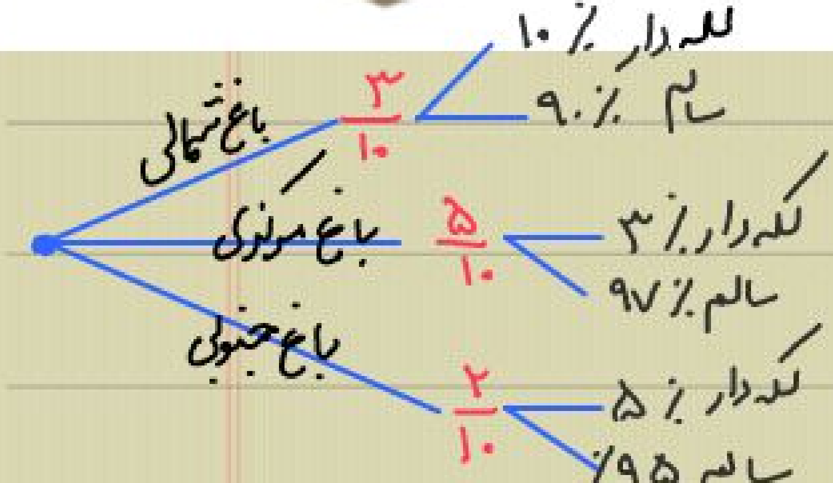
۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

$$p(A)=\sum_{k=1}^{n} p(A\cap B_k)=p(A\cap B_1)+p(A\cap B_2)+\dots+p(A\cap B_n)$$

$p(B_1)\cdot p(A|B_1)$ $p(B_2)\cdot p(A|B_2)$ $p(B_n)\cdot p(A|B_n)$

کار در کلاس صفحه ۵۹

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟



احتمال مورد نظر :

$$\frac{3}{10}\times\frac{10}{100}+\frac{5}{10}\times\frac{3}{100}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{100}=\frac{55}{1000}$$

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

برای حلّ این مسئله گیریم B_1، B_2 و B_3، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد A را نیز لکه‌دار بودن آن سیب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم :

$P(B_1)=\frac{۳}{۱۰}$, $P(B_2)=\frac{۵}{۱۰}$ $P(B_3)=\frac{۲}{۱۰}$ و

صفحه ۶۰

$P(A|B_1)=\frac{۱۰}{۱۰۰}$, $P(A|B_2)=\frac{۳}{۱۰۰}$, $P(A|B_3)=\frac{۵}{۱۰۰}$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(A)$ است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$P(A)=\underset{\frac{۳}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۱۰۰}}{P(B_1)P(A|B_1)}+\underset{\frac{۵}{۱۰}\times\frac{۳}{۱۰۰}}{P(B_2)P(A|B_2)}+\underset{\frac{۲}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۰۰}}{P(B_3)P(A|B_3)}=\frac{۳۰}{۱۰۰۰}+\frac{۱۵}{۱۰۰۰}+\frac{۱۰}{۱۰۰۰}=\frac{۵۵}{۱۰۰۰}$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

نکته مهم :

می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند؛ لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=۲$ به شکل زیر بیان می‌شود :

فرض کنید B پیشامدی باشد که $۰<P(B)<۱$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه آن رو قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد را که رنگ قرمز دیده شود A و این پیشامد را که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

واضح است که $P(A|B)=۱$ و $P(A|B')=۰/۵$ و با توجه به تعداد، دو نوع کارت داریم

$$P(B)=\frac{۲}{۲+۸}=۰/۲\ ,\ P(B')=۱-۰/۲=۰/۸$$

پس

$$P(A)=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

قانون بیز

فعالیت صفحه ۶۱

C B A

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

ب) اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟

پ) به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است، یا کاهش؟

الف) $p(C)=\frac{1}{3}$ $p(B)=\frac{1}{3}$ $p(A)=\frac{1}{3}$

ب) بله ممکن است مربوط به باغ مرکزی یا باغ جنوبی باشد

پ) افزایش - چون درصد بیشتری از سیب‌های باغ شمالی لکه‌دار هستند

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند. فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید B_1، B_2، و ... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد A، به $P(B_i|A)$ها تبدیل می‌شوند. گاهی قانون بیز را به شکل زیر می‌نویسند:

$$P(B_i \mid A)=\frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

صفحه ۶۳

کار در کلاس

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حلّ این مسئله، این پیشامد را که سیب انتخابی لکه‌دار باشد با A و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشد را به‌ترتیب با B_1، B_2 و B_3 نمایش دهید.

در صورت مسئله چه احتمال‌هایی مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم :

$P(B_1)=\frac{1}{3}$, $P(B_2)=\frac{1}{3}$, $P(B_3)=\frac{1}{3}$

و

$P(A|B_1)=\frac{10}{100}$, $P(A|B_2)=\frac{3}{100}$, $P(A|B_3)=\frac{5}{100}$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(B_1|A)$ است. ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{10}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{100}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{100}=\frac{18}{300}=\%6$$

$P(A)$

در نتیجه :

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\ldots$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{10}{100}}{\frac{18}{300}}=\frac{\frac{10}{300}}{\frac{18}{300}}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

توجه :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A|B)}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(A)}$$

تمرین صفحه ۲۴

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست‌کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

A ، B

$n(S) = 2^4 = 16$

$A =$ یک پسر یا بیشتر $\rightarrow A' =$ هر چهار فرزند دختر $\rightarrow n(A) = 15$

$B = \{ppdd, pdpd, pddp, dppd, dpdp, ddpp\}$

$n(B) = 6$

$A \cap B = B$ هر ۶ عضو B

$$p(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{6}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0/4$$

راه دوم:

$A =$ S جدید $\rightarrow$ $n(S) = 15$ (جدید)

$B =$ مجموعهٔ بالا $\rightarrow n(B) = 6$

$$p(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0/4$$

$n(S)$ جدید

محرم مهدی

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنّی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد : «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینهٔ فنّی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینهٔ فنّی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینهٔ فنّی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه‌کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنّی باشد : (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه‌کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

الف) کل خودروهای مراجعه کرده = ۸۷۰   تعداد خودروهای مردود = ۲۵۸

$\text{احتمال} = \frac{۲۵۸}{۸۷۰} = \frac{۴۳}{۱۴۵}$

ب) کل خودروهای مرکز شماره ۵ = ۷۹

" " مردود شده " " = ۲۶

$\text{احتمال} = \frac{۲۶}{۷۹}$

پ) کل خودروهای مردود شده = ۲۵۸

خودروهای مردود شده مرکز شماره ۵ = ۲۶

$\text{احتمال} = \frac{۲۶}{۲۵۸}$

۲ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

مبهم (توضیح در آخر)

وضعیت امروز ساحل	وضعیت فردا	
آرام	آرام	۹۰٪
	طوفانی	۱۰٪
طوفانی	آرام	۵۰٪
	طوفانی	۵۰٪

روز بعد → آرام ۹۰٪ ، طوفانی ۱۰٪

روز بعد → آرام ۵۰٪ ، طوفانی ۵۰٪

اگر منظور سوال فقط طوفانی بودن پس فردا باشد

$$\Rightarrow P = \frac{90}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{14}{100} = \%14$$

اگر منظور سوال طوفانی بودن هر ۲ روز آینده باشد

$$\Rightarrow P = \frac{10}{100} \times \frac{50}{100} = \frac{5}{100} = \%5$$

P (طوفانی بودن فردا)

P (طوفانی بودن پس فردا | طوفانی بودن فردا)

علت ابهام این است که سوال دقیقاً مشخص نکرده است که طوفانی بودن هر ۲ روز متوالی بعد از امروز مورد نظر است یا فقط ۲ روز بعد از امروز (فقط پس فردا)

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید: $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1\cap A_2))$

$$\cancel{P(A_1)}\times\frac{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}{\cancel{P(A_1)}}\times\frac{P(A_3\cap(A_1\cap A_2))}{\cancel{P(A_1\cap A_2)}}=P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\dots\cap A_n)=$$

$$=P(A_1)\times P(A_2|A_1)\times P(A_3|(A_1\cap A_2))+\dots\dots P(A_n|(A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}))$$

توجه: چون اشتراک خاصیت جابه‌جایی دارد و مجموعه‌ی A_1، A_2، ... A_n می‌توانند جابه‌جا شوند

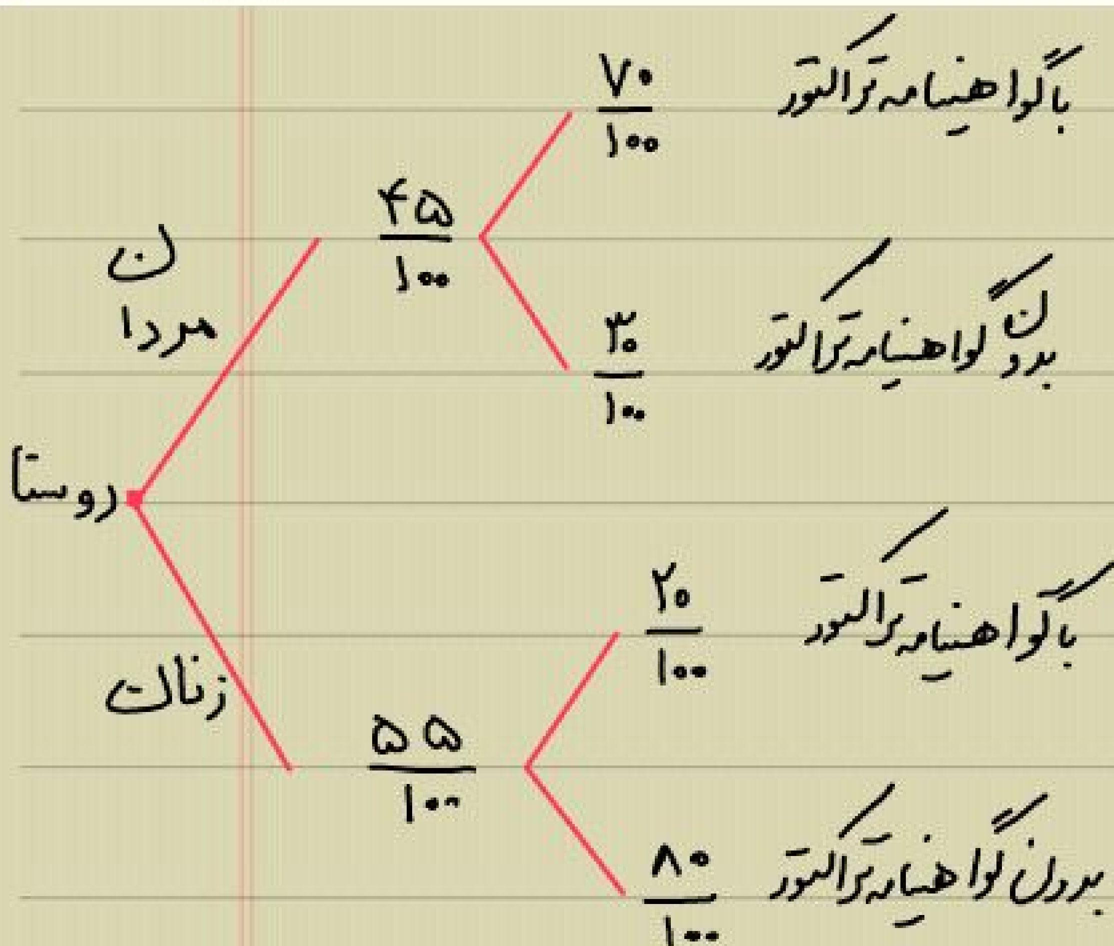
$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\dots\dots\cap A_n)=P(A_2\cap A_1\cap A_3\dots\cap A_n)\dots$$

بنابراین: تعداد حالتها = تعداد حالت‌های جابه‌جایی A_i ها

تعداد حالت‌ها = $n!$

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

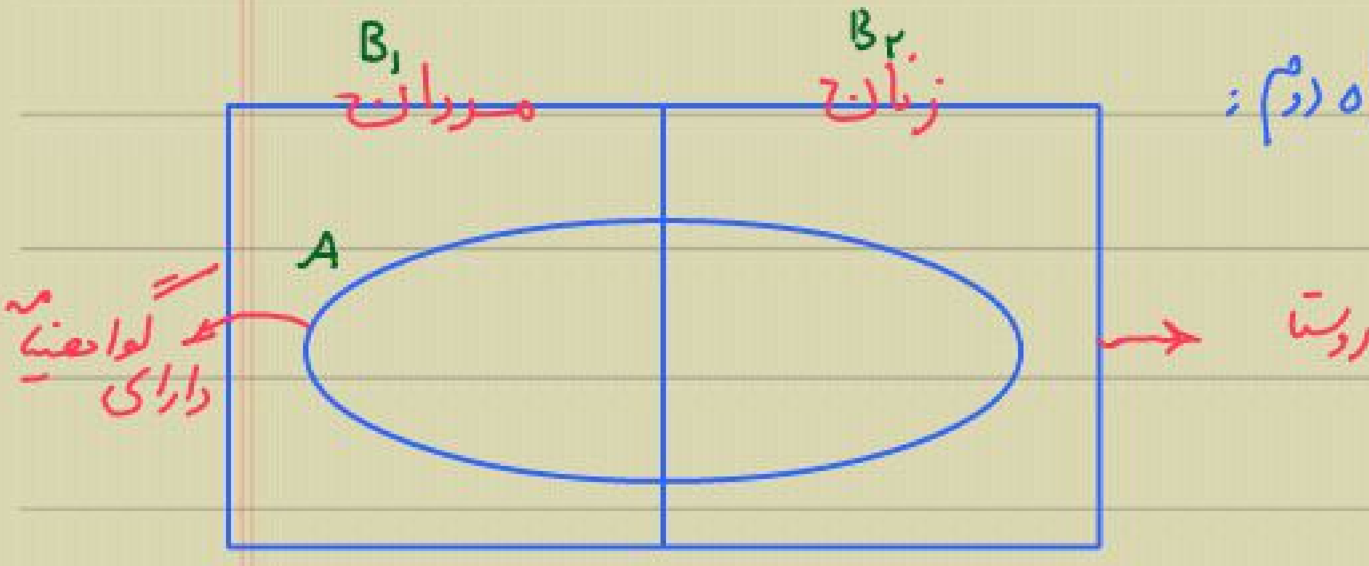
A



$$P(A)=\frac{45}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{55}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{3150}{10000}+\frac{1100}{10000}=\frac{4250}{10000}$$

$0/425$

راه دوم :



$p(B_1)=\frac{45}{100}$ $p(A|B_1)=\frac{70}{100}$ $p(B_2)=\frac{55}{100}$ $p(A|B_2)=\frac{20}{100}$

۷ دو ظرف داریم. در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

ظرف اول

۴ مهره سبز

۳ مهره قرمز

۱ مهره مشاهده نشده سبز باشد — حالت اول

ظرف دوم

۱+۳ مهره سبز

۵ مهره قرمز

۲ حالت دوم — مهره مشاهده نشده قرمز باشد

ظرف دوم

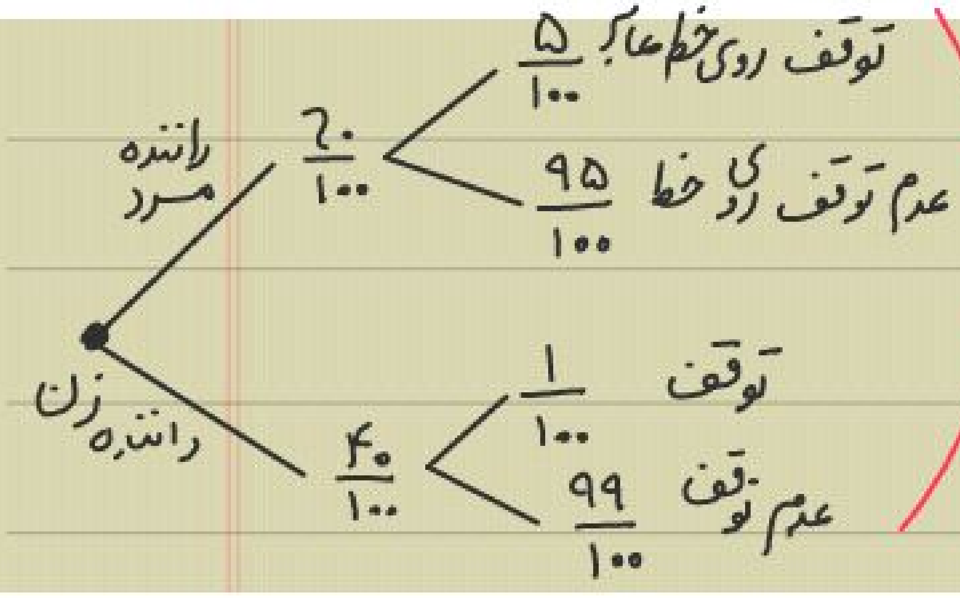
۳ مهره سبز

۱+۵ مهره قرمز

$$\text{احتمال مورد نظر} = \underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{4}{9}}_{\text{مسیر ۱}} + \overbrace{\frac{3}{7}\times\frac{3}{9}}^{\text{مسیر ۲}} = \frac{16+9}{63} = \frac{25}{63}$$

محرم مهدی

۸ در شهری ۶۰ درصد رانندهها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زنها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام میدهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟



$$P = \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{100}$$

$$P = \frac{340}{10000} = 0/034$$

۹ در دو جعبه بهترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اوّل ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبهها ۵ لامپ بهتصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار میدهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

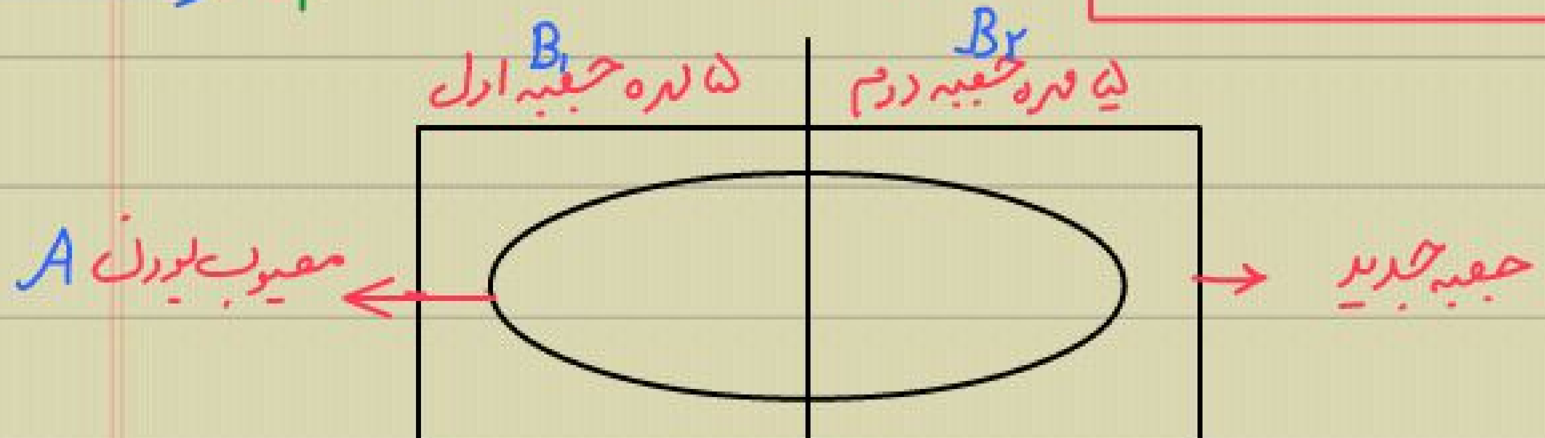
سمت چپ جعبه جدید $\to P_{B_1} = \frac{5}{10} \xrightarrow{\text{احتمال معیوب بودن}} \frac{4}{10} \to P(A|B_1)$

سمت راست جعبه جدید $\to P_{B_2} = \frac{5}{10} \xrightarrow{\text{احتمال معیوب بودن}} \frac{3}{12} \to P(A|B_2)$

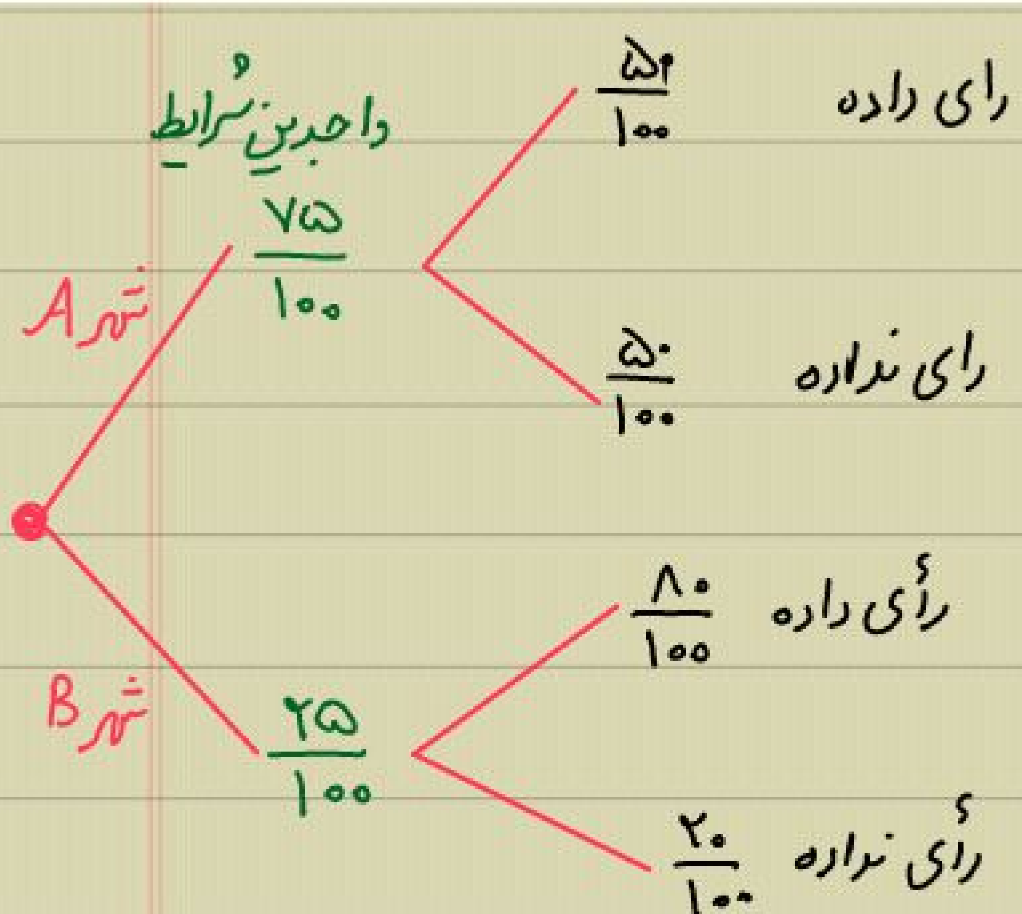
$$\longrightarrow P_{(A)} = \frac{5}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{12}$$

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{13}{40}$$



۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟



$$P(\text{رأی داده‌ها}) = \frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۵۰}{۱۰۰} + \frac{۲۵}{۱۰۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۵} = \frac{۲۳}{۴۰}$$

احتمال مورد نظر

قانون بیز

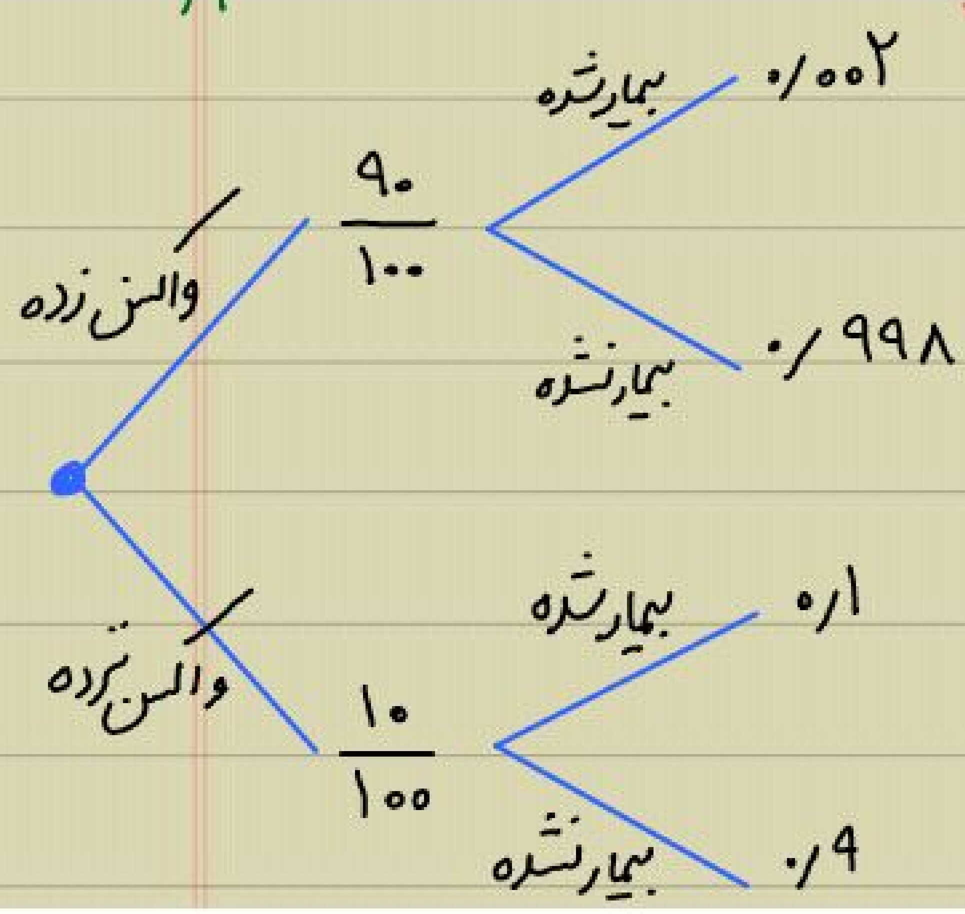
$$P(\text{از شهر } A \mid \text{رای داده باشد}) = \frac{P(\text{شهر } A) \times P(\text{رأی داده} \mid \text{شهر } A)}{P(\text{رأی داده‌ها})}$$

$$= \frac{\frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۵۰}{۱۰۰}}{\frac{۲۳}{۴۰}} = \frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۲۳}{۴۰}} = \frac{\frac{۱۵}{۴۰}}{\frac{۲۳}{۴۰}} = \frac{۱۵}{۲۳}$$

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده، ۰/۱ است.

اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

A



$$P(A)=\frac{90}{100}\times\frac{2}{1000}+\frac{10}{100}\times\frac{1}{10}$$

$$=\frac{18}{10000}+\frac{1}{100}$$

$$=0/0118$$

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

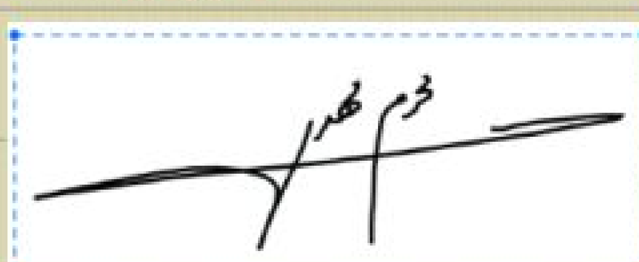
$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

طرف دوم

$$\frac{\cancel{P(B_1)}\times\frac{P(A\cap B_1)}{\cancel{P(B_1)}}}{P(A)}=\frac{P(B_1\cap A)}{P(A)}=P(B_1|A)$$

طرف اول



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۱۳ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

پیشامد A : امیر بلندقدترین عضو تیم است

$$p(A) = \frac{1}{10}$$

پیشامد B : امیر از بابک بلندقدتر است

$$p(B) = \frac{1}{2}$$

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

احتمال اینکه امیر بلندقدترین باشد با فرض اینکه از بابک قدبلندتر باشد

فضای نمونه ای اصلی دارای $10!$ حالت است که در نیمی از حالتها امیر از بابک بلندقدتر است. پس فضای نمونه ای کاهش پیدا میکند و $\frac{10!}{2}$ عضو دارد که از این تعداد

بابک	امیر								
۱	۱	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
دهم	نهم	سایر نفرات							

یعنی در $8!$ حالت از فضای کاهش یافته امیر نفر نهم و بابک نفر دهم است بنابراین

$$p(A) = \frac{8!}{\frac{10!}{2}} = \frac{8!\times 2}{10!} = \frac{\cancel{8!}\times 2}{10\times 9\times \cancel{8!}} = \frac{1}{45}$$

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۱۴ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب، با احتمال‌های ۰/۳ و ۰/۴ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

علی به ورزشگاه برود $= A$ مازیار به ورزشگاه برود $= M$

$p(A) = ۰/۳$ $p(M) = ۰/۴$

$p(M|A) = ۰/۰۸$ $p(M'|A') = ?$

$p(M\cap A) = p(A) \cdot p(M|A) = ۰/۳ \times ۰/۰۸ = ۰/۰۲۴$

$p(M\cup A) = p(M) + p(A) - p(M\cap A)$

$= ۰/۴ + ۰/۳ - ۰/۰۲۴ = ۰/۶۷۶$

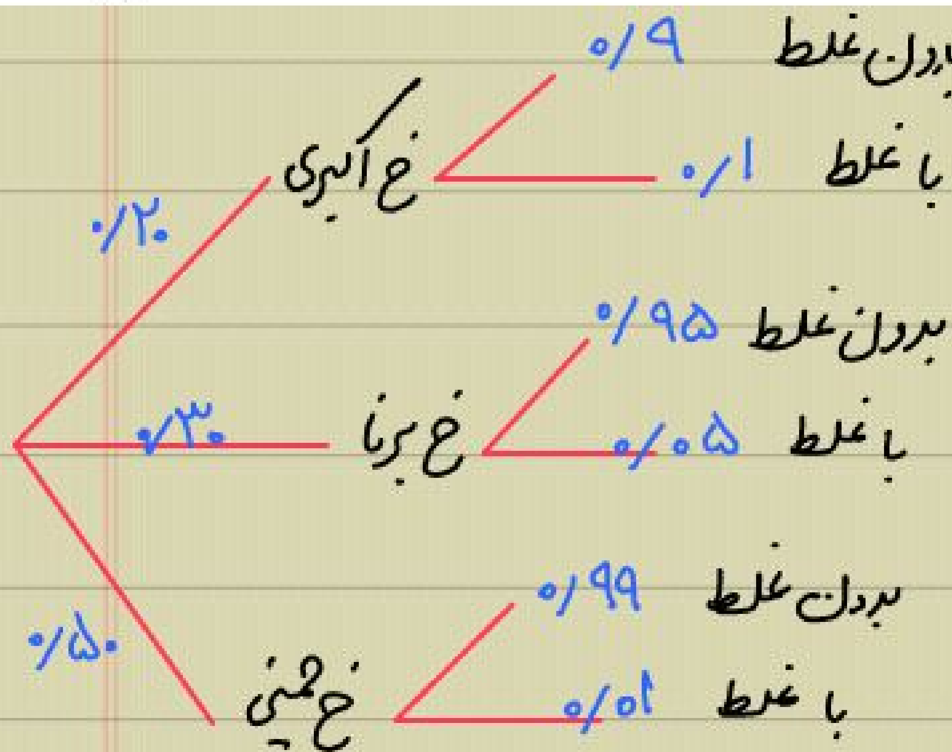
$$p(M'|A') = \frac{p(M'\cap A')}{p(A')} = \frac{p(M\cup A)'}{p(A')} =$$

$$= \frac{1 - p(M\cup A)}{1 - p(A)}$$

$$= \frac{۱ - ۰/۶۷۶}{۱ - ۰/۳} = \frac{۰/۳۲۴}{۰/۷} = ۰/۴۶$$

۱۵ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی‌اند که به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

*



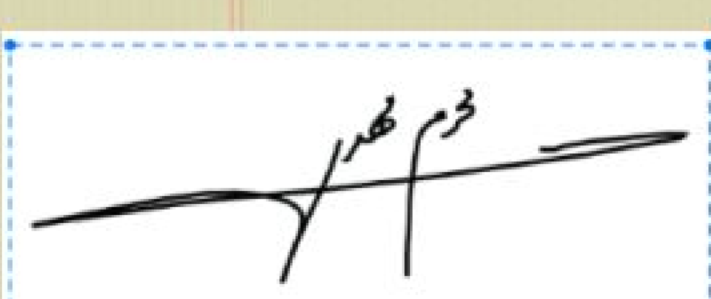
با توجه به نمودار درختی :

$$P(\text{بودن غلط در یک صفحه}) = ۰/۲ \times ۰/۱ + ۰/۳ \times ۰/۰۵ + ۰/۵ \times ۰/۰۱ = ۰/۴$$

طبق قانون بیز داریم

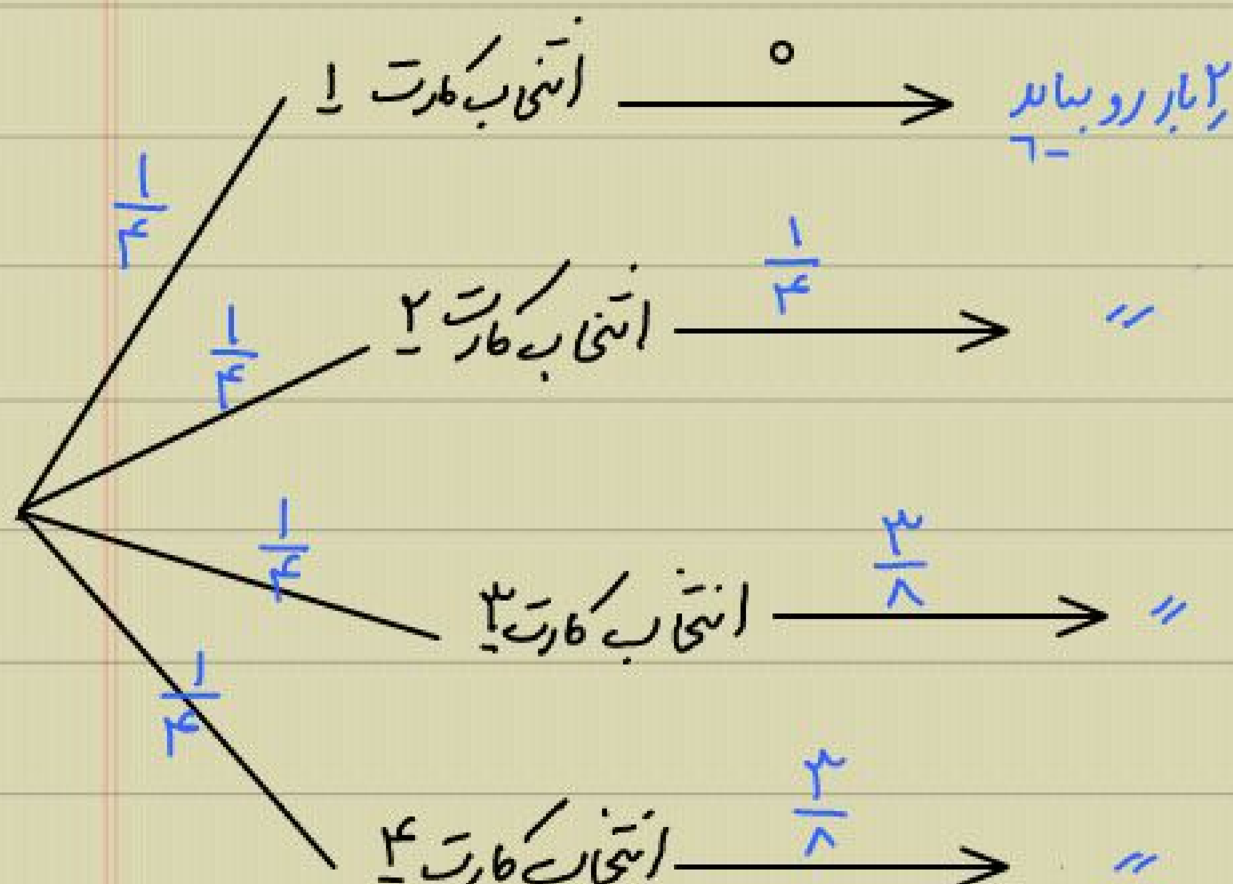
$$* \quad P(\text{خانم اکبری} \mid \text{بودن غلط در صفحه}) = \frac{P(\text{خانم اکبری}) \times P(\text{بودن غلط} \mid \text{خانم اکبری})}{P(\text{بودن غلط در صفحه})}$$

$$= \frac{۰/۲ \times ۰/۱}{۰/۴} = ۰/۵$$



09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۱۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟



طبق قانون بیز داریم.

$$P(\text{کارت } 3 \mid \text{۲ بار رو بیاید}) = \frac{P(\text{کارت } 3) \times P(\text{۲ بار رو} \mid \text{کارت } 3)}{P(\text{۲ بار رو بیاید})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8}}$$

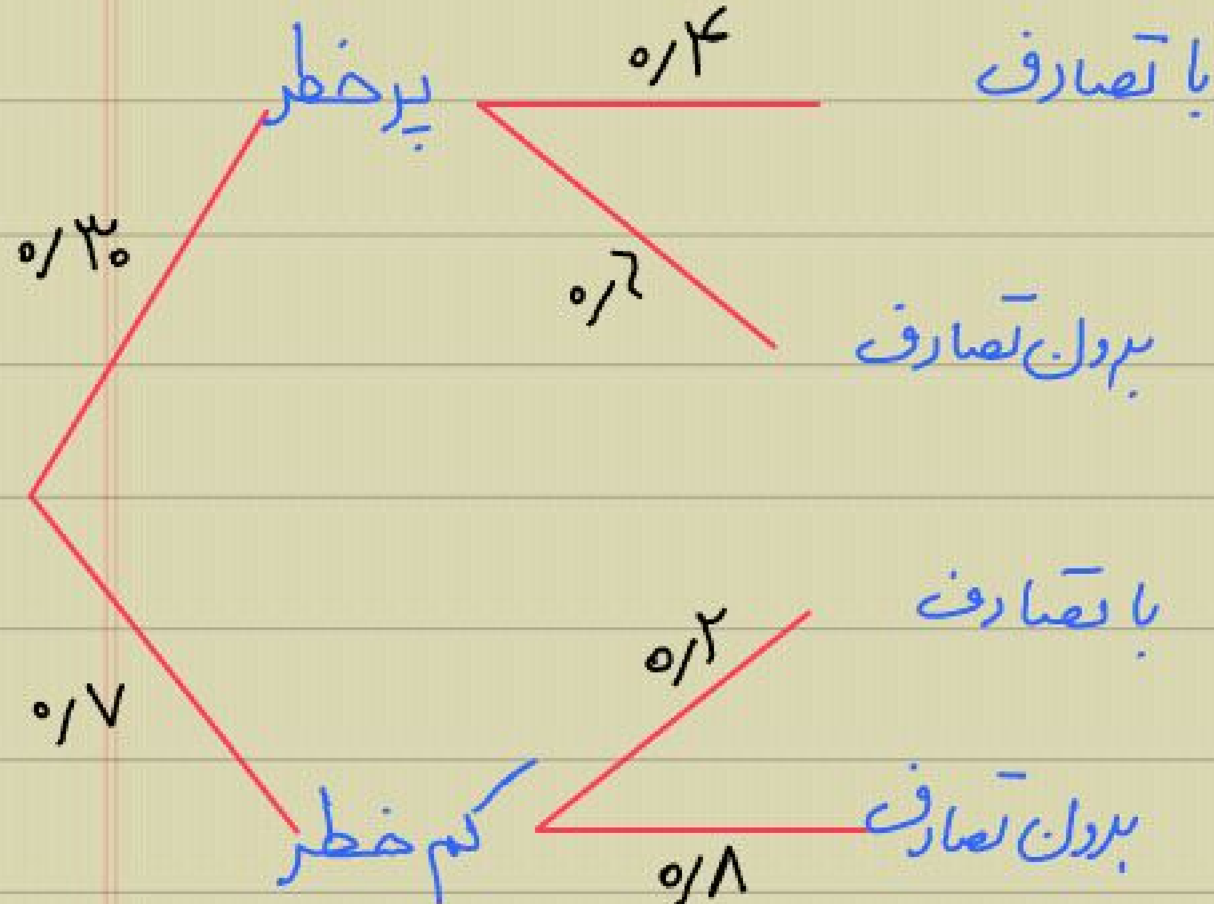
$$= \frac{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{8}\right)}{\cancel{\frac{1}{4}}\left(\frac{8}{8}\right)} = \frac{3}{8}$$

09213102271 - 09125102271 - @moharrammahdi @Riazi101112forall2

۱۷ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟



الف) $P = 0/3 \times 0/4 + 0/7 \times 0/2 = 0/26$ قانون احتمال کل

ب) $P = \frac{0/3 \times 0/4}{0/26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$ قانون بیز