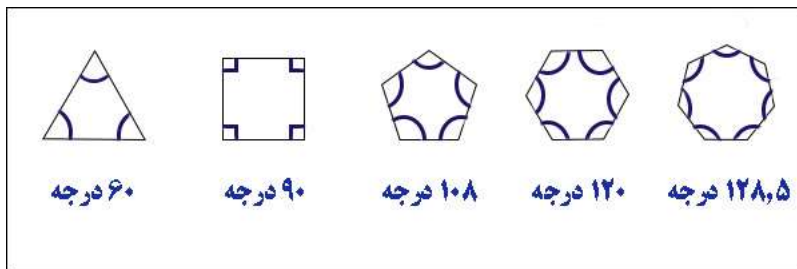


زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم چگونه محاسبه می شوند؟



در یک چند ضلعی هر دو ضلع در یک نقطه به هم می رسند. زاویه بین هر دو ضلع که داخل چند ضلعی قرار بگیرد ، زاویه داخلی نام دارد. به شکل ها دقت کنید. زاویه های داخلی به رنگ آبی نشان داده شده اند. زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم...

زاویه داخلی چیه؟

در یک چند ضلعی هر دو ضلع در یک نقطه به هم می رسند. زاویه بین هر دو ضلع که داخل چند ضلعی قرار بگیرد ، زاویه داخلی نام دارد. به شکل ها دقت کنید. زاویه های داخلی به رنگ آبی نشان داده شده اند. روابطی که در ادامه خواهیم گفت، مربوط به زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم است.

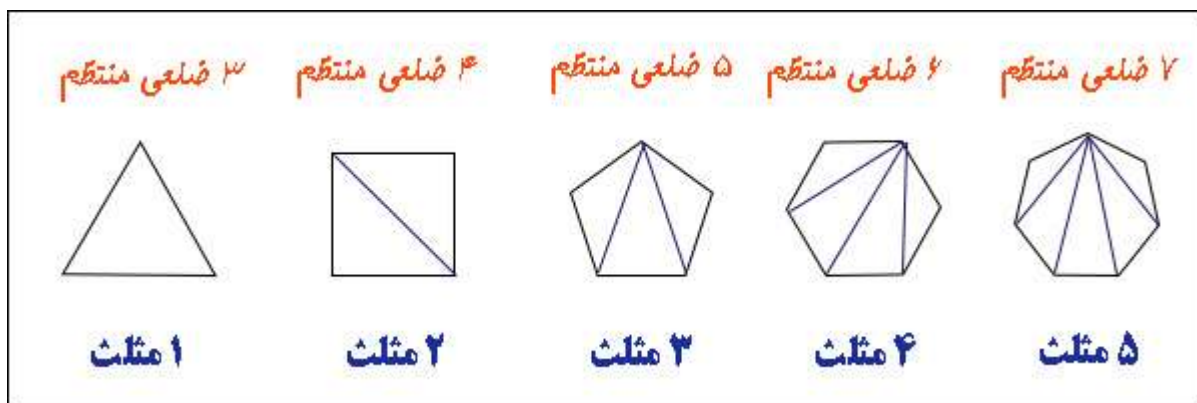
مجموع زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم

یکی از سوالات معمول در بحث چند ضلعی ها اینه که:

مجموع زاویه های داخلی یک فلان ضلعی منتظم چند است؟

با استفاده از یک استدلال جالب به شما نشون میدیم که جواب سوال بالا رو چطوری میتونید بدید. به شکل زیر دقت کنید. در هر کدام از چند ضلعی های منتظم زیر، یک راس را به سایر راس ها وصل کرده ایم. با این کار چند ضلعی به تعدادی مثلث جدا از هم تقسیم میشه. از اونجایی که میدونیم **مجموع زاویه های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه** است. پس از برای بدست آوردن مجموع زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم کافی است:

تعداد مثلث های بوجود اومده برآش رو در عدد ۱۸۰ ضرب کنیم.



اگر متوجه شده باشید، همیشه تعداد مثلث های جدا از هم که بوجود میاد، دو تا از تعداد ضلع های چند ضلعی کمتره. بنابراین دیگه لازم نیست شکلش رو بکشیم و ببینیم چندتا مثلث توی چند ضلعی مون بوجود میاد! تنها کافیه رابطه زیر یادمون بمونه:

$$۱۸۰ \times (۲ - \text{تعداد اضلاع})$$

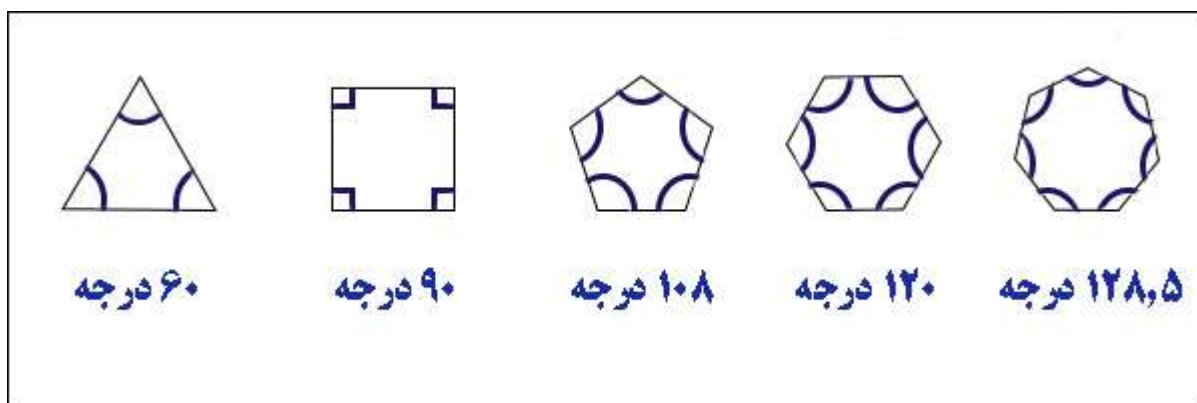
= مجموع زاویه های داخلی در چند ضلعی های منتظم

اندازه هر زاویه داخلی در چند ضلعی های منتظم

چون در چند ضلعی های منتظم همه زاویه ها با هم مساوی است، پس با تقسیم مجموع زاویه ها بر تعداد آن ها، اندازه هر زاویه داخلی بدست میاد. یعنی:

$$\text{تعداد اضلاع} / ۱۸۰ \times (۲ - \text{تعداد اضلاع}) = \text{اندازه هر زاویه داخلی در چند ضلعی های منتظم}$$

اندازه هر زاویه داخلی رو برای بعضی از چند ضلعی های منتظم براتون نوشتم تا اگر دوست دارید توی سوالات تستی با سرعت بیشتر جواب بدید، اونا رو حفظ کنید.



محاسبه تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم با داشتن یک زاویه

سوال:

فرض کنید تنها یک زاویه داخلی از یک چندضلعی منتظم را بدانیم. میخواهیم ببینیم روش محاسبه تعداد اضلاع یک چندضلعی منتظم با داشتن یک زاویه داخلی آن چگونه است.

پاسخ:

روش مستقیم حل این سوال اینه که فرمول زیر رو برابر با زاویه داخلی داده شده قرار بدیم و با انجام دادن به سری محاسبات جبری، مقدار n یعنی تعداد اضلاع را پیدا کنیم.

$$x(n-2) = ۱۸۰(n-۲) \times$$

اما استفاده ازین روش خیلی محاسبات زیادی داره. من میخوام به روش خیلی خیلی ساده تر بهتون یاد بدم. میدونیم که زاویه داخلی و خارجی در هر گوشه مکمل هم هستن، یعنی جمعشون همیشه

۱۸۰ درجه. پس من اول میام زاویه داخلی که داده شده رو از ۱۸۰ کم میکنم تا زاویه خارجی بدست بیاد. حالا اگه ۳۶۰ رو به زاویه خارجی تقسیم کنم، تعداد اضلاع چندضلعی بدست میاد!

آخرش یه ذره گیج شدی؟؟؟

ببین، میدونیم که مجموع زاویه های خارجی همه ی چندضلعی ها برابر ۳۶۰ درجه است. اگه شکلمون منتظم باشه یعنی همه زاویه هاش باهم برابره، داخلی هاش باهم و خارجی هاش هم باهم. خب یعنی اگه ۳۶۰ رو بر تعداد زاویه ها (که مساوی تعداد اضلاع هست) تقسیم کنیم، اندازه هر زاویه خارجی بدست میاد. من این جا اومدم برعکسش عمل کردم. ۳۶۰ رو بر زاویه خارجی تقسیم کردم تا تعداد اضلاع بدست بیاد. به همین سادگی!

حالا برای شکل داده شده بیایم حساب کنیم که چندضلعی هستش:

$$۱۸۰ - ۱۳۵ = ۴۵ = \text{زاویه خارجی}$$

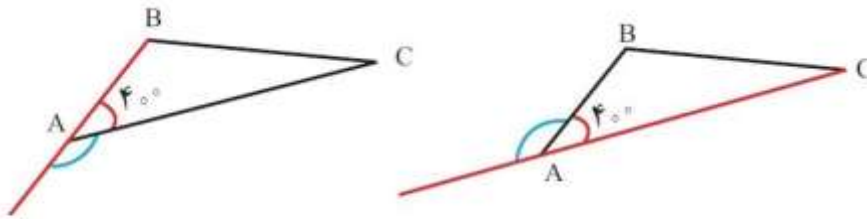
$$۳۶۰ / ۴۵ = ۸ = \text{تعداد اضلاع}$$

این شکل یک هشت ضلعی منتظم است!

به صورت فرمولی این کارایی که انجام دادیم به صورت زیر میشه:

$$\text{(زاویه داخلی - ۱۸۰)} \div ۳۶۰ = \text{تعداد اضلاع}$$

زاویه های خارجی در چند ضلعی های منتظم چگونه محاسبه می شوند؟



زاویه خارجی :

زاویه ای که در هر راس بین امتداد یک ضلع و ضلع دیگر ساخته می شود، زاویه خارجی است.

در شکل، زاویه هایی که با رنگ آبی نشان داده شده اند زاویه خارجی است.

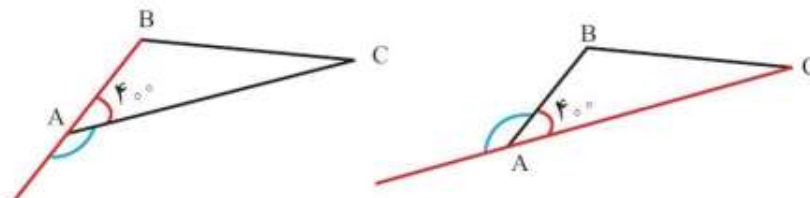
در این درس میخواهیم زاویه های خارجی در چند ضلعی های منتظم را معرفی کنیم. یک چند ضلعی محدب رو در نظر بگیرید. توی هر گوشه دوتا خط به هم میرسند تا یک زاویه بوجود بیاد. به اون خط ها...

زاویه خارجی چیه؟

در این درس میخواهیم زاویه های خارجی در چند ضلعی های منتظم را معرفی کنیم. یک چند ضلعی محدب رو در نظر بگیرید. توی هر گوشه دوتا خط به هم میرسند تا یک زاویه بوجود بیاد. به اون خط ها ضلع های زاویه گفته میشه. این زاویه که بین ضلع های زاویه تشکیل شده رو زاویه داخلی میگن که قبلا باهاش آشنا شدیم. حالا اگه یکی از ضلع های زاویه رو به صورت خط راست ادامه بدیم، زاویه ای که بین این امتداد و ضلع دیگه زاویه تشکیل میشه، زاویه خارجی گفته میشه. در شکل زاویه خارجی با رنگ آبی مشخص شده است.

رابطه بین زاویه داخلی و خارجی در هر گوشه

توی تعریف گفتیم که ضلع زاویه رو باید به صورت خط راست ادامه بدیم. اگه به شکل زیر دقت کنید کاملا واضح است که توی هر گوشه زاویه داخلی و خارجی مکمل هم هستن و یا به عبارتی:



زاویه خارجی :

زاویه ای که در هر راس بین امتداد یک ضلع و ضلع دیگر ساخته می شود، زاویه خارجی است.

در شکل، زاویه هایی که با رنگ آبی نشان داده شده اند زاویه خارجی است.






در هر گوشه جمع زاویه داخلی و خارجی مساوی ۱۸۰ است.

محاسبه زاویه های خارجی در چند ضلعی های منتظم

برای محاسبه زاویه های خارجی در چند ضلعی های منتظم یک تمرین خیلی عالی توی کتاب هست. با انجام دادن اون به یک نتیجه خیلی مهم میرسیم. الان میخوایم تمرین کتاب رو باهم حل کنیم و راجع بش بحث کنیم.

میدونیم اگه از تعداد اضلاع ۲ تا کم کنیم و جوابش رو در ۱۸۰ ضرب کنیم، مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی منتظم بدست میاد.

میدونیم مجموع زاویه داخلی و خارجی در هر گوشه هم برابر ۱۸۰ میشه. پس مجموع زاویه های داخلی و خارجی کل شکل رو اگه بخوایم باید تعداد گوشه ها رو در ۱۸۰ ضرب کنیم.

تعداد ضلع ها	شکل	مجموع زاویه های داخلی	مجموع زاویه های داخلی و خارجی	مجموع زاویه های خارجی
۳		$1 \times 180^\circ$	$3 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۴		$2 \times 180^\circ$	$4 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۵		$3 \times 180^\circ$	$5 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
۶		$4 \times 180^\circ$	$6 \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$
n		$(n-2) \times 180^\circ$	$n \times 180^\circ$	$2 \times 180^\circ = 360^\circ$

با دونستن این دو مورد ستوم سوم و چهارم جدول رو کامل میکنیم. حالا برای پرکردن ستون آخر باید ستوم سوم رو از ستون چهارم کم کنیم. اگه دقت کنید این اختلاف واسه همه شکل ها $2 \times 180 = 360$ بدست اومده. از این تمرین نتیجه میگیریم که:

مجموع زاویه های خارجی همیشه مساوی ۳۶۰ است.

محاسبه هر زاویه خارجی یک چند ضلعی منتظم

در چند ضلعی های منتظم تمام ضلع ها با هم و تمام زاویه های هم با هم مساوی است. این مطلب برای زاویه های خارجی هم صادق است. یعنی تمام زاویه های خارجی هم باهم مساوی هستند. پس برای پیدا کردن اندازه هر زاویه خارجی در یک چند ضلعی منتظم به صورت زیر عمل می کنیم:

اندازه هر زاویه خارجی در چند ضلعی منتظم مساوی ۳۶۰ تقسیم بر تعداد اضلاع

البته میدونیم که تعداد اضلاع و تعداد زاویه ها باهم برابره!

اثبات اینکه چرا مجموع زاویه های خارجی هر n ضلعی برابر ۳۶۰ میشه

در ابتدای درس گفتیم که در هر گوشه از یک چندضلعی جمع زاویه داخلی با زاویه خارجی مساوی با ۱۸۰ میشه. یک n ضلعی دارای n گوشه است بنابراین جمع همه زاویه های داخلی با همه زاویه های خارجی مساوی $n \times 180$ هست.

از طرفی میدونیم که جمع همه زاویه های داخلی به تنهایی از فرمول $۱۸۰(n-۲)$ بدست میاد. در نتیجه اگه فرمول اولی رو منهای دومی کنیم، عبارت باقی مونده برابر با مجموع همه زاویه های خارجی خواهد بود.

$$n \times 180 - (n-2) \times 180 = 180 \times n - n \times 180 + 2 \times 180 = 180n - 180n + 360 = 360$$

به همین راحتی اثبات شد!