بسط نسبت های مثلثاتی:

① $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$

مثال: مقدار هریک از نسبت های مثلثاتی زیر را حساب کنید.

الف) $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ب) $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

مثال: اگر θ زاویهٔ منفرجه، $\sin\theta = \frac{3}{5}$ مطلوب $\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$.

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \cos\theta = \frac{-4}{5}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ ناحیهٔ دوم

$\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = \sin\theta \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} \cos\theta$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-4}{5} = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$

مثال: درصورتی که α و β هر دو زاویهٔ تندباشند و $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، $\cos\beta = \frac{12}{13}$ مطلوب $\sin(\alpha - \beta)$.

تند یعنی ناحیهٔ اول

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \xrightarrow{\text{ریشه دوم}} \sin\beta = \frac{5}{13}$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{16}{65}$

مثال: درستی تساوی های زیر را ثابت کنید

الف) $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$

چپ $= \sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b = 2\sin a \cos b =$ راست

ب) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ → حفظ باشید

چپ $= \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha =$ راست

② $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

مثال: مقدار هریک از عبارات زیر را محاسبه نمایید

الف) $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

ب) $\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

مثال: اگر x در ربع سوم، $\tan x = \frac{3}{4}$، حاصل $\cos(\frac{\pi}{3} + x)$ را بدست آورید.

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \longrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \cos x = -\frac{4}{5}$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ربع سوم}} \sin x = -\frac{3}{5}$

$\cos(\frac{\pi}{3} + x) = \cos\frac{\pi}{3}\cos x - \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{1}{2} \times -\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times -\frac{3}{5} = \frac{-4\sqrt{3}}{10}$

مثال: در صورتی که $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ و $\cos\beta = -\frac{5}{13}$، انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم باشد، حاصل $\cos(\alpha - \beta)$ را بدست آورید.

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{ربع اول}} \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin\beta = \frac{12}{13}$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{-5}{13} + \frac{2}{3} \times \frac{12}{13} = \frac{-5\sqrt{5} + 24}{39}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ → حفظ باشید

مثال: ثابت کنید

چپ $= \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$ راست

③ $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

مثال: مقدار $\tan\dfrac{\pi}{12}$ را حساب کنید.

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } 3} = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$

مثال: در صورتی که $\cot\theta = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\theta + 45^\circ)$ را حساب کنید.

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \Rightarrow \tan\theta = 2$$

$$\tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan\theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta \times \tan 45^\circ} = \frac{2 + 1}{1 - 2 \times 1} = -3$$

مثال: اگر $\tan(a+b) = \frac{2}{5}$ ، $\tan(a-b) = \frac{3}{7}$ مقدار $\tan 2a$ را حساب کنید.

$$\tan 2a = \tan\big((a+b) + (a-b)\big) = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b)\tan(a-b)} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}$$

$\xrightarrow{\text{ضرب صورت و مخرج در } 35}$ $\dfrac{14 + 15}{35 - 6} = \dfrac{29}{29} = 1$

تست: اگر $\alpha + \beta = 135^\circ$ ، $\tan(\alpha - \beta) = \frac{3}{4}$ مقدار عبارت زیر کدام است؟

$$\frac{\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}$$

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $-\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

حل:

$$= \frac{(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)}{(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)}$$

$$= \frac{\cos(\alpha+\beta) \times \cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta) \times \sin(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 135^\circ \times \cos(\alpha-\beta)}{\sin 135^\circ \times \sin(\alpha-\beta)} = \cot 135^\circ \times \cot(\alpha-\beta)$$

($135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$)

$$= -\underbrace{\cot 45^\circ}_{1} \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$$

حل چند نمونه سوال

۱- حاصل عبارت را بدست آورید

الف) $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin(75^\circ) = \sin(45^\circ+30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ب) $\frac{\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \cos 20^\circ \sin 10^\circ}{\cos 17^\circ \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \sin 13^\circ} = \frac{\sin(20^\circ+10^\circ)}{\cos(17^\circ+13^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۲- ثابت کنید

الف) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$

$= \cos x\cos y - \sin x\sin y + \cos x\cos y + \sin x\sin y = 2\cos x\cos y$

ب) $\sin(x+\frac{\pi}{4}) + \sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin x$

$= \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4} + \sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin x\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\sin x$

۳- در صورتی که α و β هر دو زاویه‌ی تند و $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\beta = \frac{-5}{13}$ مطلوب است

$\sin(\alpha+\beta)$ ، $\sin 2\alpha$ ، $\cos 2\beta$ ، $\tan(\alpha-\beta)$

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos\alpha = \frac{-4}{5} \longrightarrow \tan\alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$

$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{25}{169} = \frac{144}{169} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \sin\beta = \frac{12}{13} \longrightarrow \tan\beta = \frac{12/13}{-5/13} = -\frac{12}{5}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{3}{5}\times\frac{-5}{13} + \frac{-4}{5}\times\frac{12}{13} = \frac{-63}{65}$ ، $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{-4}{5} = \frac{-24}{25}$

$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = \frac{-119}{169}$

$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{-3/4-(-12/5)}{1+\frac{-3}{4}\times\frac{-12}{5}} = \frac{33}{56}$

۴ - اگر $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$ باشد،

الف) مقدار $\sin x+\cos x$ چقدر است؟

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{4}\longrightarrow \sin x+\cos x=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

ب) مقدار $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ را بیابید.

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

۵ - اگر $\tan x+\cot x=5$ باشد مقدار $\sin 2x$ را بدست آورید.

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=5\longrightarrow\frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}}{\sin x\cos x}=5\Rightarrow 5\sin x\cos x=1\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{1}{5}$$

$$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

۶ - حاصل هریک را بدست آورید.

الف) $\sin 22.5^\circ\cos 22.5^\circ=\frac{1}{2}\sin(2\times 22.5^\circ)=\frac{1}{2}\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

توجه: $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

ب) $(\cos 15^\circ-\sin 15^\circ)(\cos 15^\circ+\sin 15^\circ)=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ=\cos 2\times 15^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

توجه: $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$

۷ - اگر $\sin x-\cos x=\sqrt{2}$ باشد مقدار $\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بدست آورید.

$$\xrightarrow[\text{توان }2]{}(\sin x-\cos x)^2=(\sqrt{2})^2\Rightarrow\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-\underbrace{2\sin x\cos x}_{\sin 2x}=2$$

$$\Rightarrow-\sin 2x=1\Rightarrow\sin 2x=-1$$

$$\cos^2 2x=1-\sin^2 2x=1-(-1)^2=1-1=0\xrightarrow{\text{ریشه}}\cos 2x=0$$

ملاحیدری
۰۹۱۶۸۳۲۴۵۰۰