

نام خداوند جان آفرین که سخن در زبان آید



حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی و فیزیک

فصل ۴

تهیه و تنظیم: مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

- ۱ رادیان
- ۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا
- ۳ توابع مثلثاتی
- ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا



@MATHCLASS2



Majid.ghaderi.mathclass.2

توابع مثلثاتی

فصل ۴

درس ۳

اهداف

- آشنایی با مفهوم تابع مثلثاتی
- درک رفتار تابع مثلثاتی از روی نمودار
- آشنایی با رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحه مختصات از طریق نقطه یابی
- آشنایی با ویژگی های توابع سینوس و کسینوس
- آشنایی با رسم توابع سینوس و کسینوس در صفحه مختصات از طریق انتقال

فعالیت صفحه ۱۰۵ کتاب درسی

(۱) در جدول زیر نسبت مثلثاتی سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[0, 2\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

ω (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin \omega$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

(۲) باتوجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب ها را تکمیل و سپس نقاط به دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید.

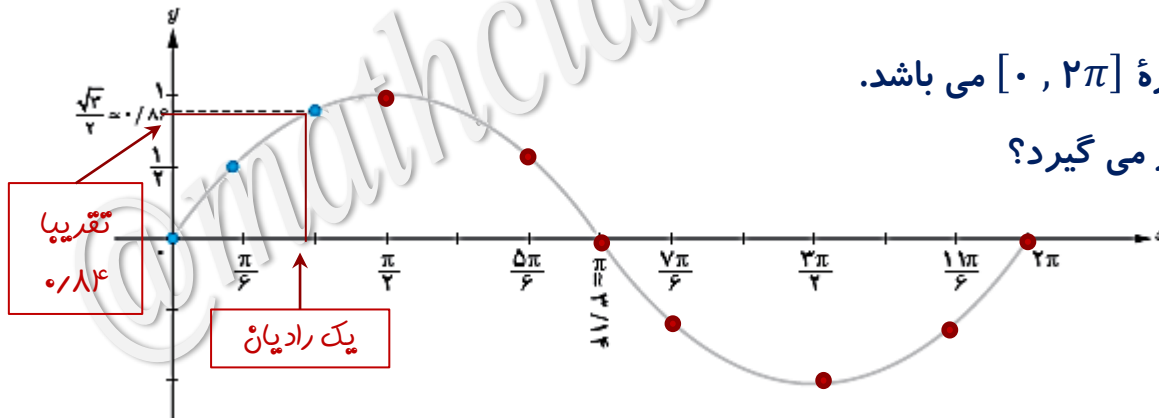
آیا نقاط متناظر با زوج های مرتب، روی منحنی داده شده قرار می گیرند؟ **بله**

آیا این منحنی تابع است؟ **بله**، هر خط موازی محور عرض ها منحنی را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

$$\left\{ (0, 0), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), (\pi, 0), \left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), \left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right), (2\pi, 0) \right\}$$

(۳) نمودار حاصل، منحنی تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ می باشد.

با توجه به آن مقدار $\sin 1$ کجای محور y ها قرار می گیرد؟

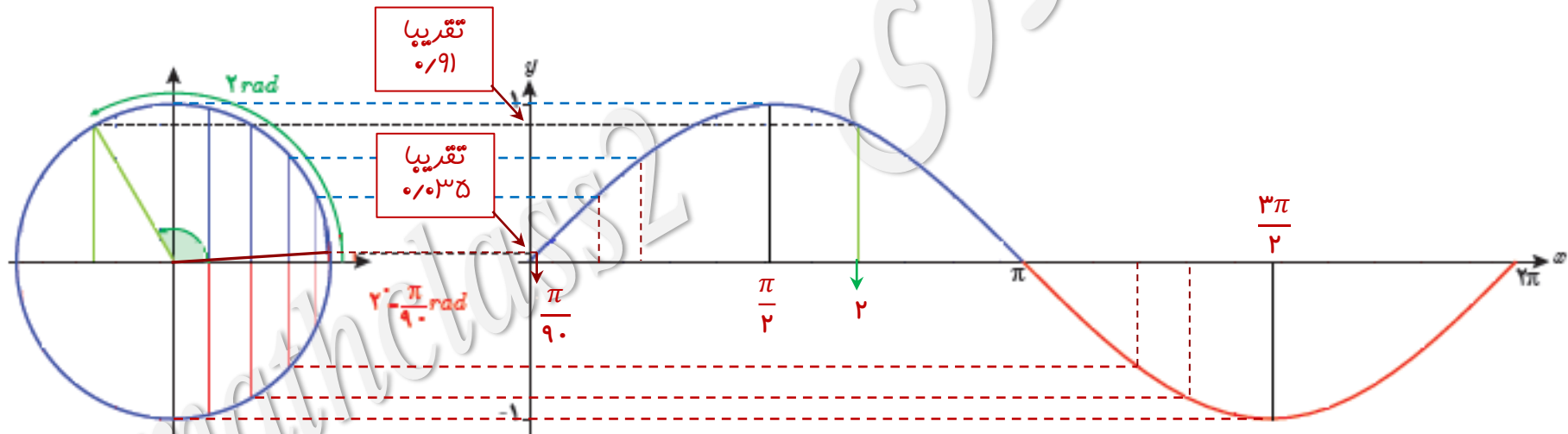


منظور یک رادیان است. تقریباً ۵۷ درجه

فعالیت ۴ صفحه ۱۰۶ کتاب درسی

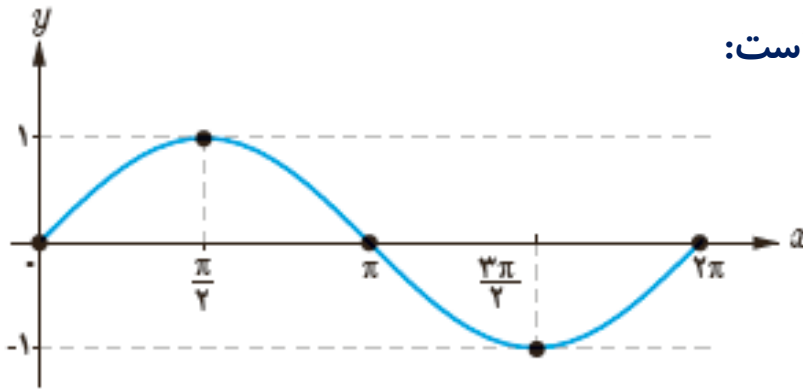
در تابع $y = \sin x$ همیشه x را بر حسب رادیان در نظر می گیرند مگر آن که صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود.

با توجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin 2^\circ$ و $\sin 2$ را مشاهده می کنید.



جمع بندی فعالیت

نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به شکل زیر است:



با توجه به شکل جدول زیر را در هر بازه تکمیل کنید.

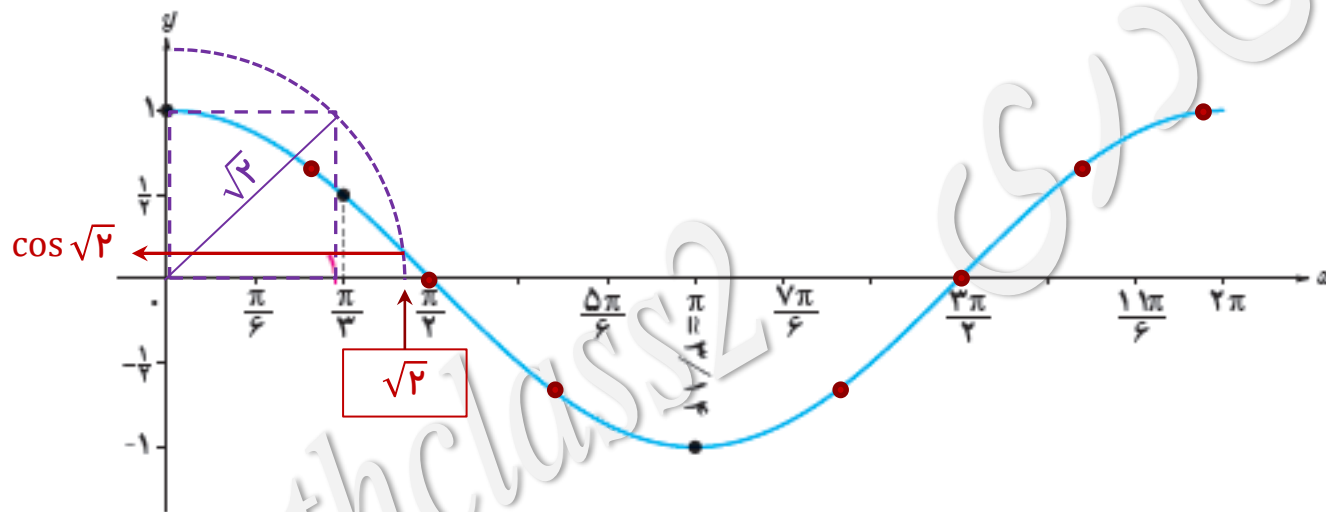
این جدول درباره مقادیر تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ است.

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می یابد.	مقدار تابع سینوس از ۱ به ۰ کاهش می یابد.	مقدار تابع سینوس از ۰ به -۱ کاهش می یابد.	مقدار تابع سینوس از -۱ به ۰ افزایش می یابد.
مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع سینوس در ربع دوم مثبت است.	مقدار تابع سینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع سینوس در ربع چهارم منفی است.

فعالیت صفحه ۱۰۶ کتاب درسی

(۱) تابع $y = \cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$\left\{ (0, 1), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), (\pi, -1), \left(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{7\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (2\pi, 1) \right\}$$

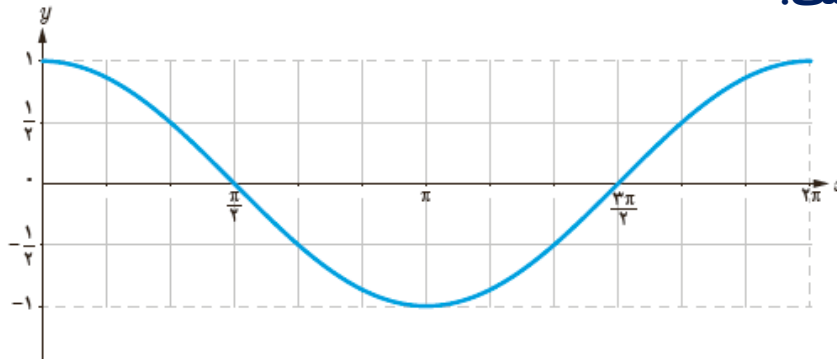


(۲) در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{2}$ رادیان را بر محور x ها بیابید و سپس مکان $\cos \sqrt{2}$ را بر روی محور y ها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

$$\cos \sqrt{2} \cong 0.156$$

جمع بندی فعالیت

نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ به شکل زیر است:



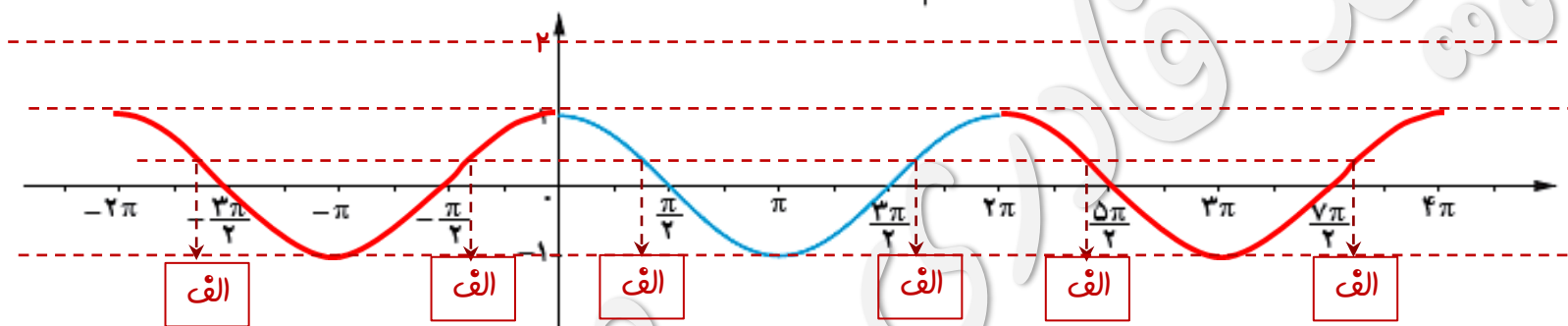
با توجه به شکل جدول زیر را در هر بازه تکمیل کنید.

این جدول درباره مقادیر تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ است.

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به صفر کاهش می یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۰ به (-) کاهش می یابد.	مقدار تابع کسینوس از (-) به ۰ افزایش می یابد.	مقدار تابع کسینوس از ۰ به ۱ افزایش می یابد.
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.	مقدار تابع کسینوس در ربع دوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع سوم منفی است.	مقدار تابع کسینوس در ربع چهارم مثبت است.

فعالیت ۳ صفحه ۱۰۷ کتاب درسی

۲ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ و نیز $\cos(-x) = \cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y = \cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور x ‌ها به دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ با هم متفاوت هستند؟ **خیر**



۴ با توجه به نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

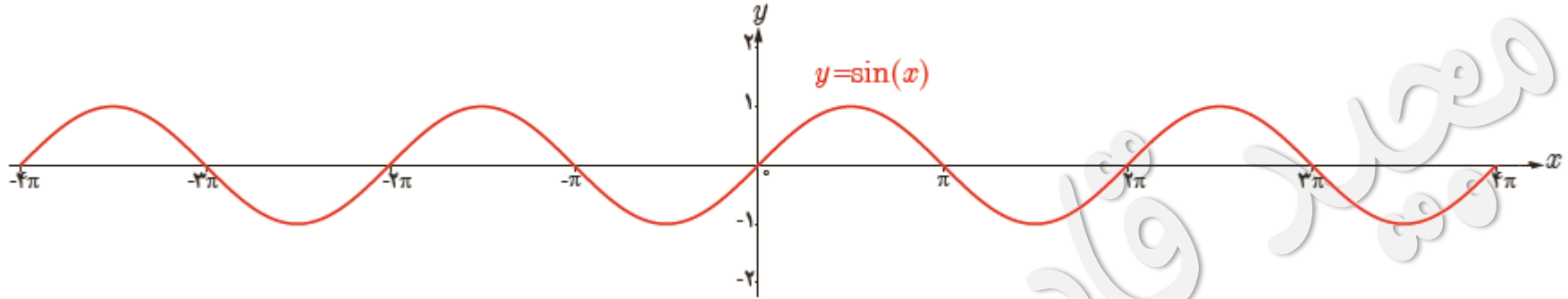
الف) آیا می‌توان بر روی محور x ‌ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = \frac{1}{3}$ باشد؟ **بله**

ب) آیا می‌توان بر روی محور x ‌ها عددی مانند x یافت که برای آن $\cos x = 2$ باشد؟ **خیر**

پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = \cos x$ در این بازه چقدر است؟

بیشترین مقدار یک و کمترین مقدار منفی یک است.

صفحه ۱۰۷ کتاب درسی

تابع سینوس: $y = \sin x$ 

در این تابع؛ مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است.

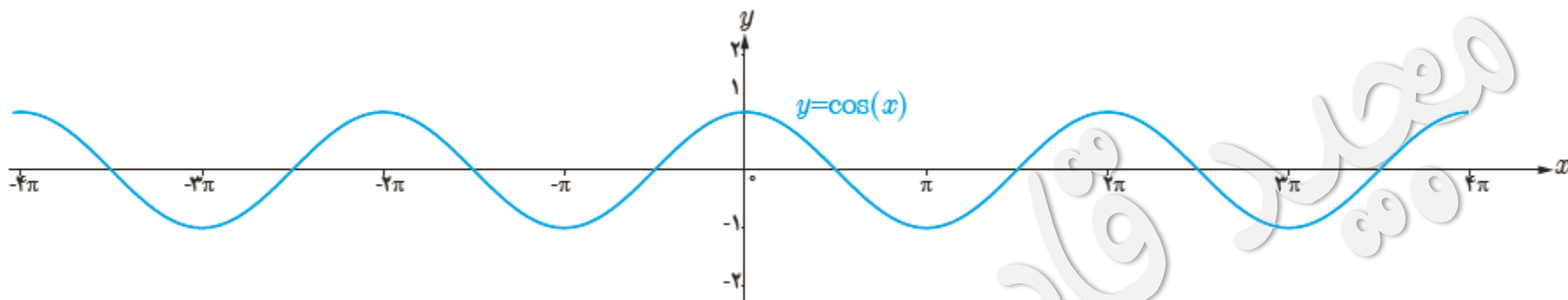
$$\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$$

به عبارتی دیگر

ویژگی ها

- ✓ دامنه تابع $y = \sin x$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.
- ✓ برد تابع $y = \sin x$ برابر با بازه $[-1, 1]$ است.
- ✓ مقدار تابع $y = \sin x$ به ازای هر $x = \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ برابر صفر است. مانند: $x = 0$.
- ✓ بیشینه (max) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر یک است که به ازای هر $x = \{2k\pi + \frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$ به دست می آید.
- ✓ کمترین (min) مقدار تابع $y = \sin x$ برابر منفی یک است که به ازای هر $x = \{2k\pi + \frac{3\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$ به دست می آید.

صفحه ۱۰۷ کتاب درسی

تابع کسینوس: $y = \cos x$ 

در این تابع؛ مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است.

$$\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$$

به عبارتی دیگر

ویژگی ها

- ✓ دامنه تابع $y = \cos x$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.
- ✓ برد تابع $y = \cos x$ برابر با بازه $[-1, 1]$ است.
- ✓ مقدار تابع $y = \cos x$ به ازای هر $x = \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ برابر صفر است. مانند: $x = \frac{\pi}{2}$
- ✓ بیشینه (max) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر یک است که به ازای هر $x = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ به دست می آید.
- ✓ کمترین (min) مقدار تابع $y = \cos x$ برابر منفی یک است که به ازای هر $x = \{(2k + 1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ به دست می آید.

کار در کلاس صفحه ۱۰۸ کتاب درسی

درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

(الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد. نادرست، یعنی سینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x رادیان است.

(ب) $\sin \sqrt{5}$ یک عدد حقیقی است. درست، $-1 \leq \sin x \leq 1$

(پ) $\cos 3 = \cos 3^\circ$ نادرست، کسینوس ۳ رادیان با کسینوس ۳ درجه برابر نیست.

(ت) اگر $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ آنگاه $0 < \cos x < 1$ است. نادرست، اگر $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ آنگاه $0 \leq \cos x \leq 1$

(ث) عددی می توان یافت که سینوس آن برابر ۲- باشد. نادرست، $-1 \leq \sin x \leq 1$

(ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است. نادرست، $\cos \pi = -1$

یادآوری

انتقال نمودار در راستای محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x + k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور x ها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x - k)$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور x ها به دست آورد.

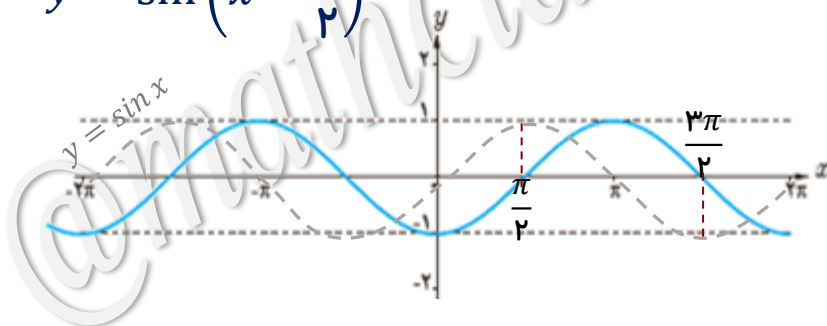
تمرین تکمیلی

سوال ۱: با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ ، تابع با ضابطه داده شده را رسم کنید.

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت محور x ها انتقال دهیم.

انتقال یافته (طولی) تابع $y = \sin x$



یادآوری

انتقال نمودار در راستای محور عرض ها

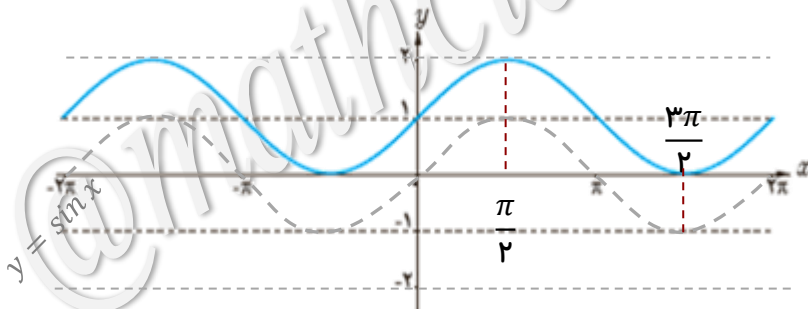
با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) + k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت مثبت محور y ها به دست آورد.

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $f(x) - k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه k واحد در جهت منفی محور y ها به دست آورد.

تمرین تکمیلی

سوال ۲: با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ ، تابع با ضابطه داده شده را رسم کنید.

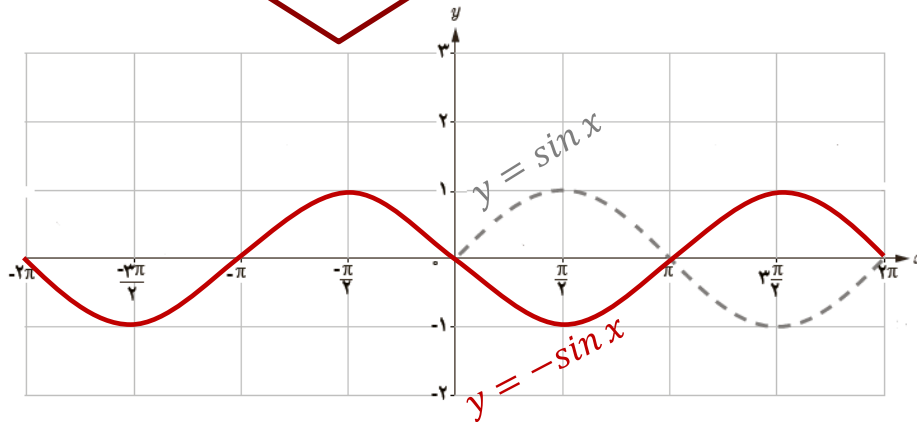
$$y = \sin x + 1$$



برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.

انتقال یافته (عرضی) تابع $y = \sin x$

یادآوری



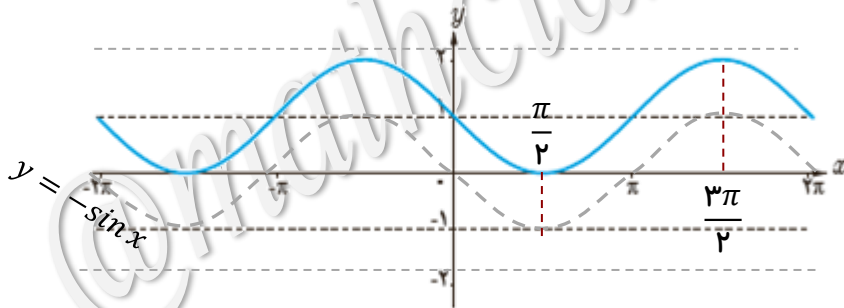
قرینه نمودار نسبت به محور طول ها

با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می توان نمودار تابع $-f(x)$ را با قرینه کردن نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها به دست آورد.

تمرین تکمیلی

سوال ۳: با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ ، تابع با ضابطه داده شده را رسم کنید.

$$y = -\sin x + 1$$

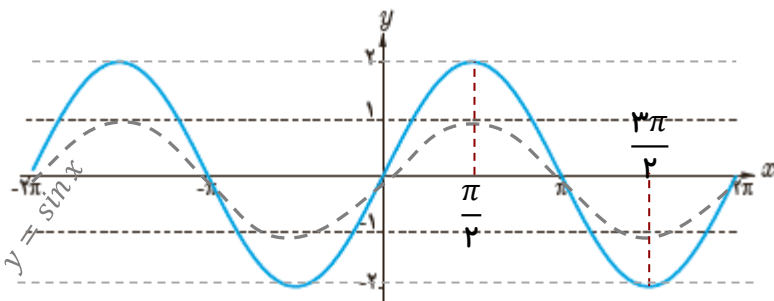


برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم سپس آن را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.

تمرین تکمیلی

سوال ۴: با توجه به نمودار تابع $y = \sin x$ ، تابع با ضابطه داده شده را رسم کنید.

۱ $y = 2 \sin x$

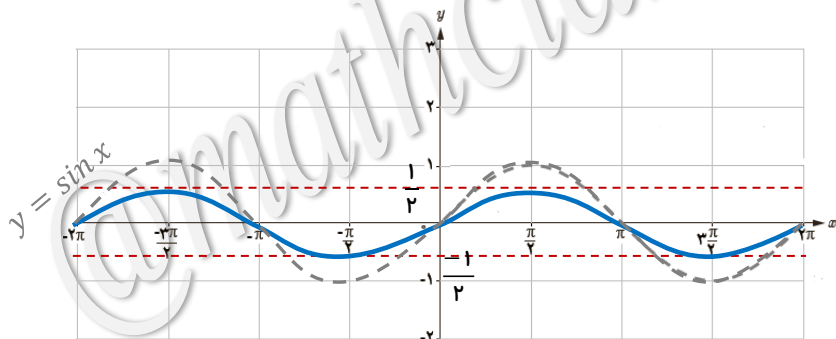


$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin x \leq 2$$

چون برد این تابع بازه $[-2, 2]$ است، برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را روی بازه $[-2, 2]$ انبساط دهیم.

منبسط شده تابع $y = \sin x$

۲ $y = \frac{1}{2} \sin x$



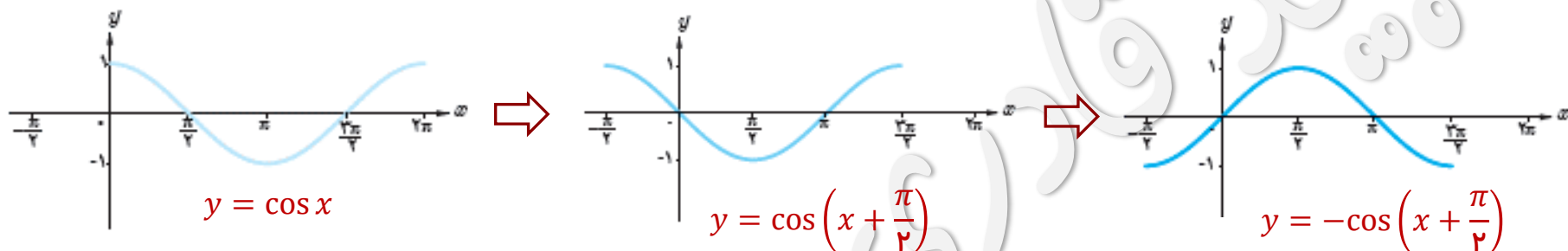
$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}$$

چون برد این تابع بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ است، برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را روی بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ انقباض دهیم.

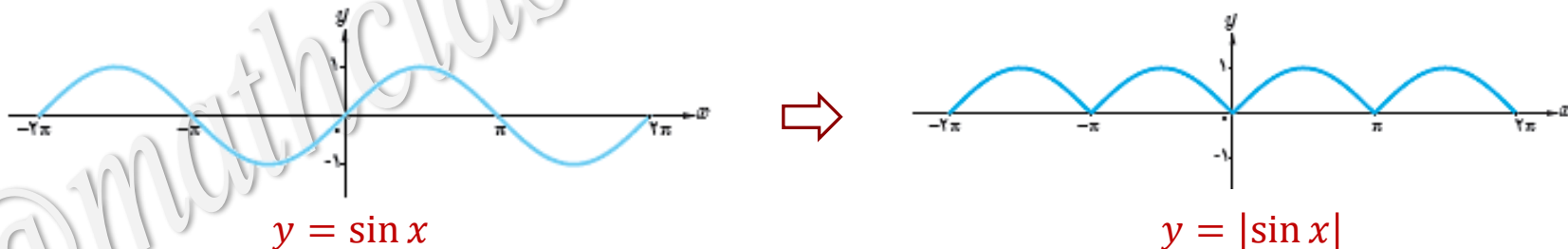
منقبض شده تابع $y = \sin x$

مثال صفحه ۱۰۸ کتاب درسی

با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \cos x$ و $y = \sin x$ ، نمودار توابع $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = |\sin x|$ در زیر رسم شده است. روش رسم آنها را توضیح دهید.

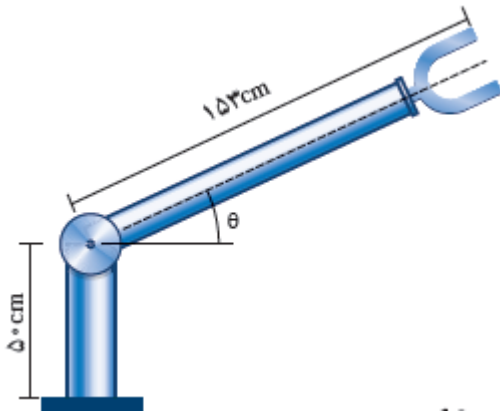


نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت منفی محور x ها به سمت چپ انتقال داده، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه شده است.



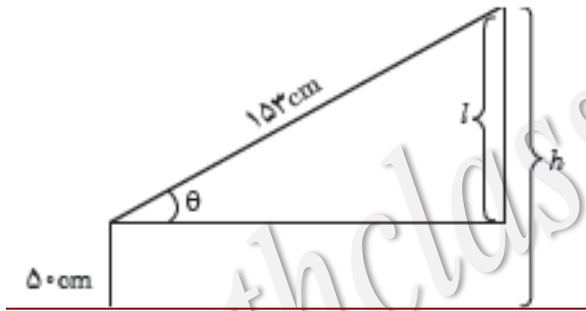
نمودار تابع $y = \sin x$ رسم شده سپس بخش هایی از آن که زیر محور x ها قرار دارند، آینه وار به بالای محور منتقل شده است.

مثال صفحه ۱۰۸ کتاب درسی



روبات ها در زمینه های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات ها از توابع مثلثاتی استفاده می شود. در شکل روبه رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می کنید. باتوجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیره روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل سازی کنید. $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$

وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. ابتدا l ، سپس ارتفاع نوک گیره از سطح زمین h را به دست می آوریم.



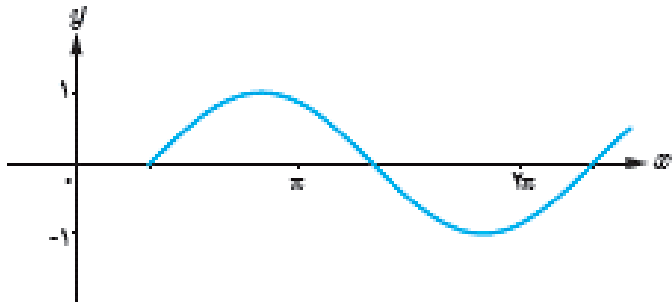
$$\sin \theta = \frac{l}{153} \rightarrow l = 153 \sin \theta$$

$$h = 153 \sin \theta + 50$$

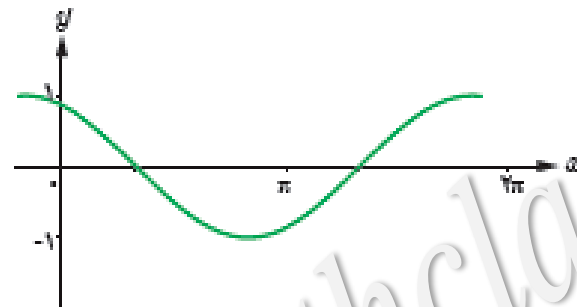
تمرین ۱ صفحه ۱۰۹ کتاب درسی

توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

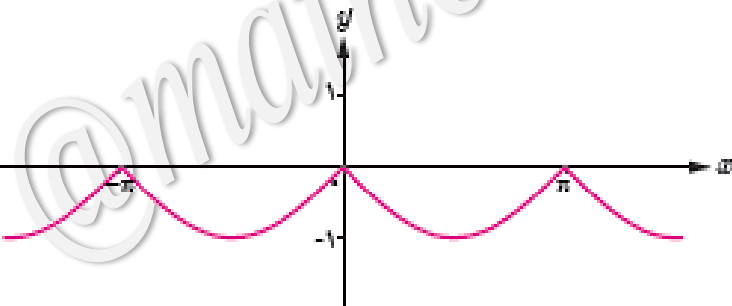
ب) $y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



ب) $y = \cos(x + \frac{\pi}{6})$



الف) $y = -|\sin x|$



پ) برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ در جهت مثبت محور x ها به سمت راست انتقال دهیم.

ب) برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ در جهت منفی محور x ها به سمت چپ انتقال دهیم.

الف) برای رسم این نمودار کافی است بخش هایی از نمودار تابع $y = \sin x$ که زیر محور x ها قرار دارند را آینه وار به بالای محور منتقل کنیم سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

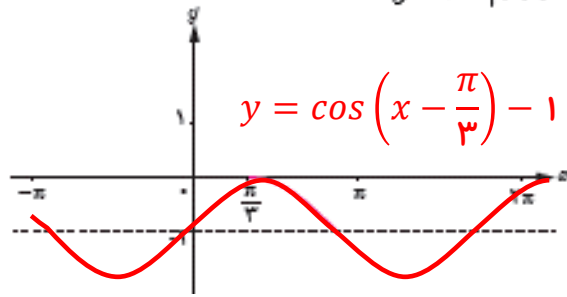
تمرین ۲ صفحه ۱۰۹ کتاب درسی

در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

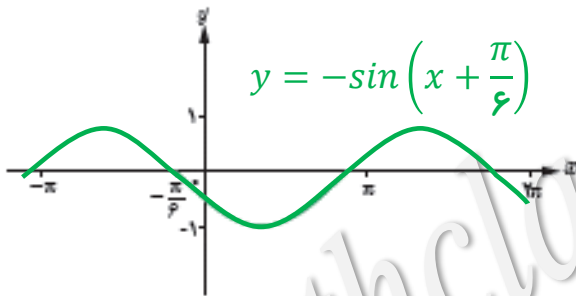
پ) $y = 1 + |\cos x|$

ب) $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$

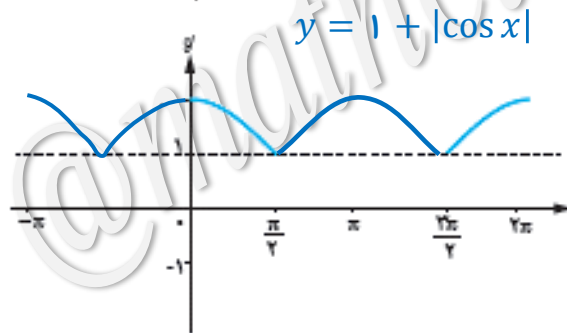
الف) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



ب) برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{3}$ در جهت مثبت محور x ها به سمت راست و یک واحد در جهت منفی محور y ها به پایین انتقال دهیم.



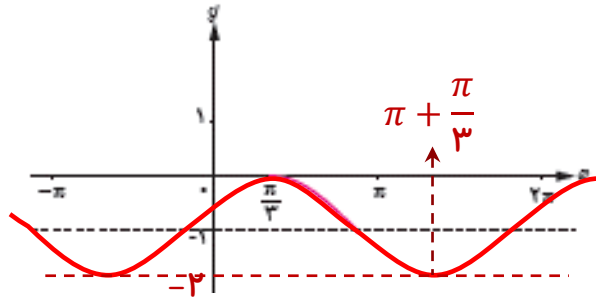
الف) برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{6}$ در جهت منفی محور x ها به سمت چپ انتقال دهیم سپس نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



پ) برای رسم این نمودار کافی است بخش هایی از نمودار تابع $y = \cos x$ که زیر محور x ها قرار دارند را آینه وار به بالای محور منتقل کنیم سپس نمودار حاصل را یک واحد در جهت مثبت محور y ها به بالا انتقال دهیم.

تمرین ۳ صفحه ۱۰۹ کتاب درسی

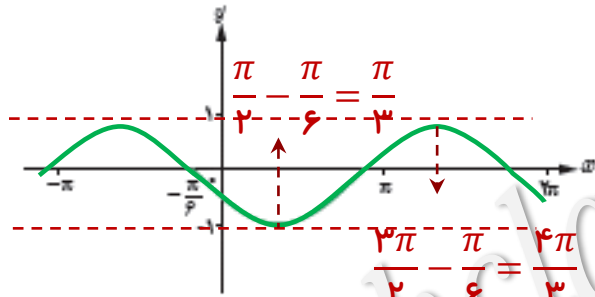
با توجه به نمودارهای سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می دهد؟



$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

کمترین مقدار -۲ است و به ازای $x = (2k - 1)\pi + \frac{\pi}{3}$ به دست می آید.

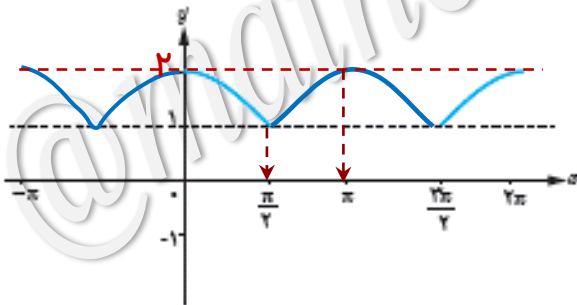
بیشترین مقدار صفر است و به ازای $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ به دست می آید.



$$y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

کمترین مقدار -۱ است و به ازای $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ به دست می آید.

بیشترین مقدار یک است و به ازای $x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$ به دست می آید.



$$y = 1 + |\cos x|$$

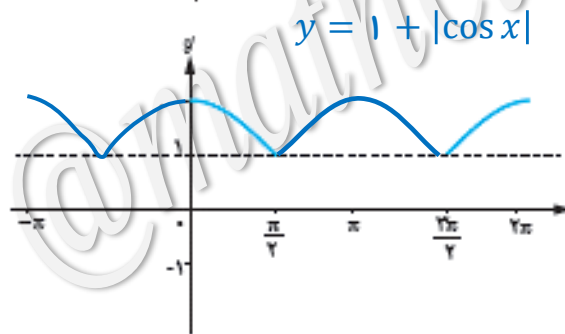
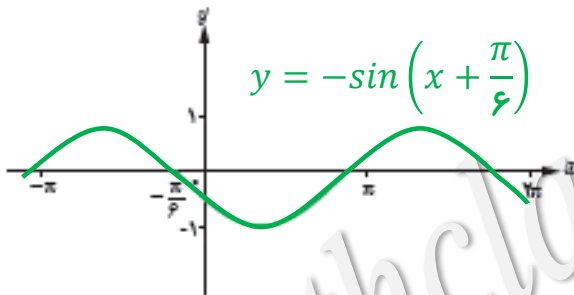
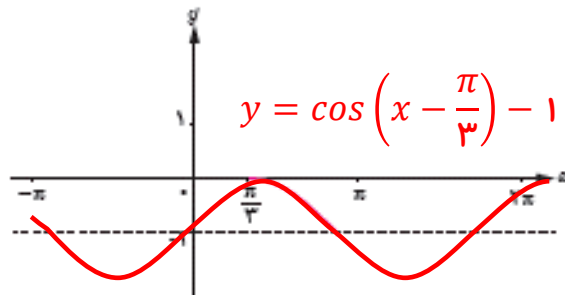
کمترین مقدار یک است و به ازای $x = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ به دست می آید.

بیشترین مقدار ۲ است و به ازای $x = k\pi$ به دست می آید.

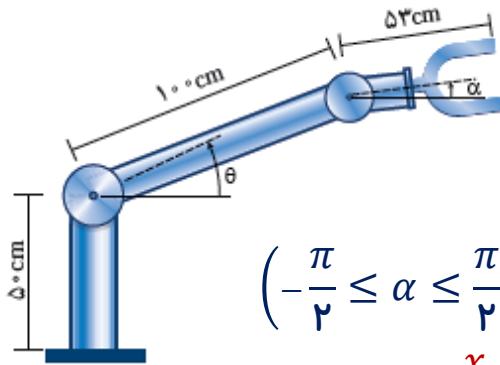
تمرین ۴ صفحه ۱۰۹ کتاب درسی

با توجه به نمودارهای سؤال ۲، نشان دهید کدام یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سوال در بازه $(0, \pi)$ یک به یک است؟

هیچکدام، در هر مورد خطوطی موازی محور x ها می توان رسم نمود طوری که نمودار را در پیش از یک نقطه قطع کند.



تمرین ۵ صفحه ۱۰۹ کتاب درسی



در طراحی روبات های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه رو در نظر می گیرند.

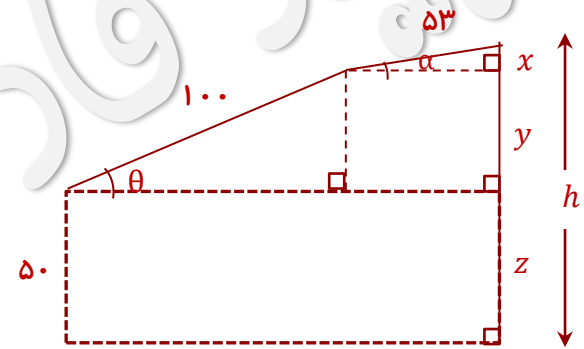
الف) ارتفاع نوک گیره این روبات از سطح زمین را، براساس توابعی از θ و α مدل سازی کنید.

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \alpha = \frac{x}{53} \rightarrow x = 53 \sin \alpha$$

$$\sin \theta = \frac{y}{100} \rightarrow y = 100 \sin \theta$$

$$h = x + y + z = 53 \sin \alpha + 100 \sin \theta + 50$$



ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شی در ارتفاع $23/5$ سانتی متر، مفصل دوم خود را در حالت $\alpha = -30^\circ$ قرار داده است.

تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

$$h = 53 \sin \alpha + 100 \sin \theta + 50 \xrightarrow[h = 23/5]{\alpha = -30^\circ} 23/5 = 53 \sin(-30^\circ) + 100 \sin \theta + 50$$

$$\rightarrow -26/5 = -53 \sin(30^\circ) + 100 \sin \theta \rightarrow -26/5 = -53 \left(\frac{1}{2}\right) + 100 \sin \theta$$

$$\rightarrow -26/5 = -26/5 + 100 \sin \theta \rightarrow 0 = 100 \sin \theta \rightarrow 0 = \sin \theta \rightarrow \theta = 0$$

تمرین تکمیلی

سوال ۵: هر یک از توابع با ضابطه های داده شده را با استفاده از نمودار تابع سینوس یا کسینوس رسم کنید.

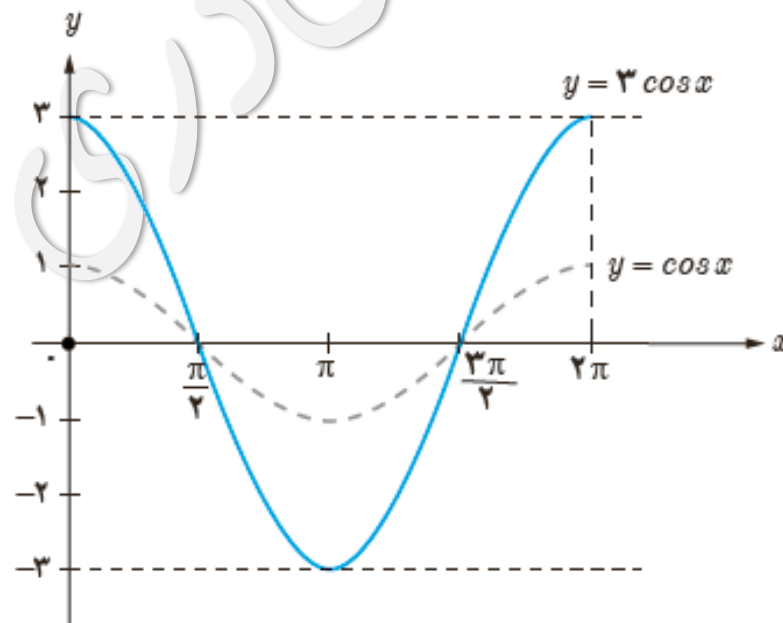
۱ $y = 3 \cos x$, $[0, 2\pi]$

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \cos x \leq 3$

چون برد این تابع بازه $[-3, 3]$ است، برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را روی بازه $[-3, 3]$ انبساط دهیم.

منبسط شده تابع $y = \cos x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	3	0	-3	0	3

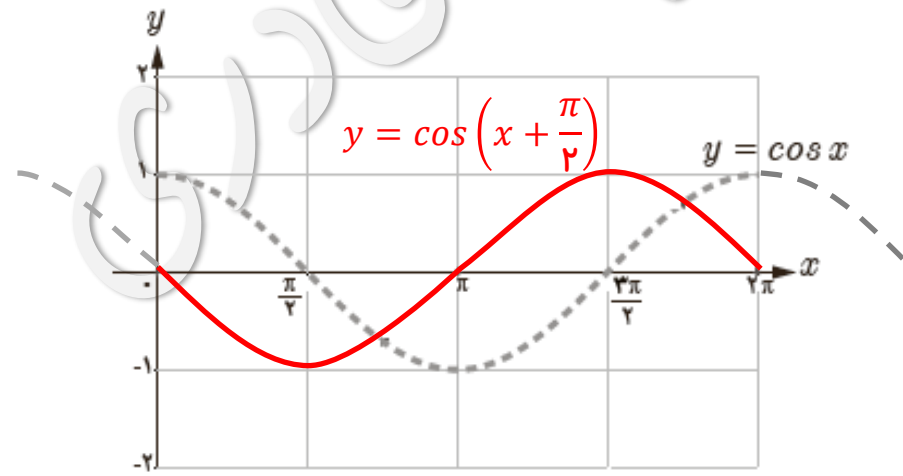


تمرین تکمیلی

۲ $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $[0, 2\pi]$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت منفی محور x ها انتقال دهیم.

انتقال یافته (طولی) تابع $y = \cos x$



x	.	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	.	-1	.	1	.

نتیجه

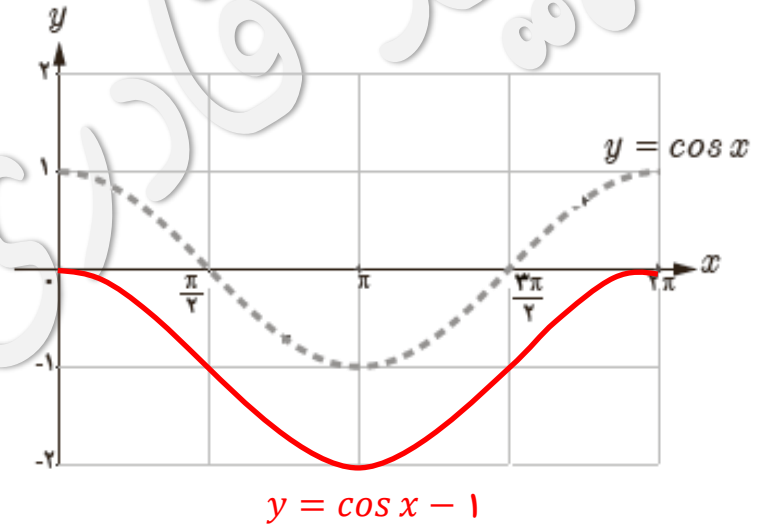
$$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

تمرین تکمیلی

۳ $y = \cos x - 1$, $[0, 2\pi]$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه یک واحد در جهت منفی محور y (انتقال دهیم).

انتقال یافته (عرضی) تابع $y = \cos x$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	-1	-2	-1	0

تمرین تکمیلی

۴ $y = 1 - \frac{1}{2} \cos x$, $[0, 2\pi]$

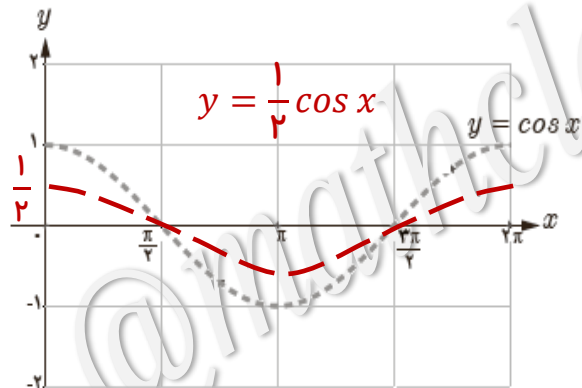
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



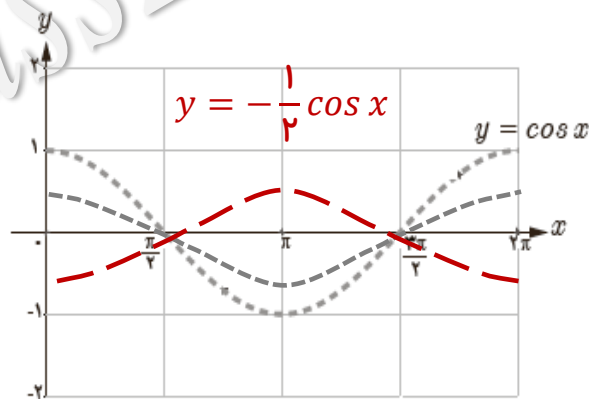
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

(۱) چون برد این تابع بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ است، برای رسم این نمودار ابتدا باید نمودار تابع $y = \cos x$ را

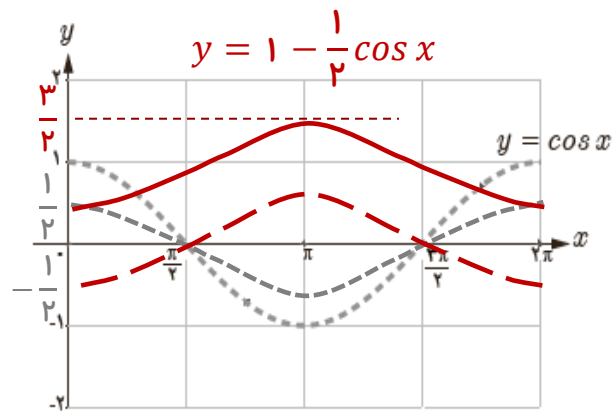
روی بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ انقباض دهیم.



(۲) سپس نمودار تابع $y = \frac{1}{2} \cos x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.



(۳) در نهایت نمودار $y = -\frac{1}{2} \cos x$ را، به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.



تمرین تکمیلی

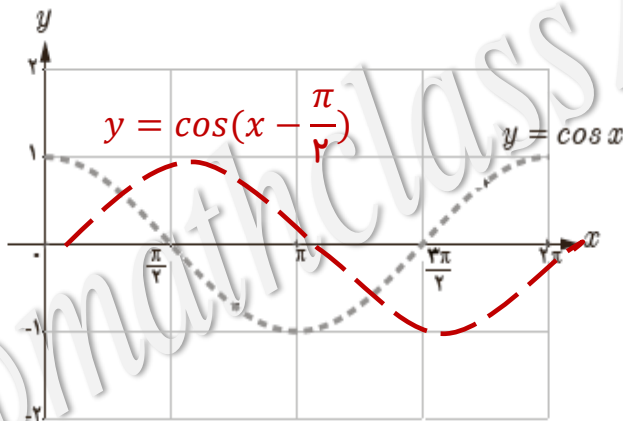
۵ $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$, $[0, 2\pi]$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	0	1	0	-1	0

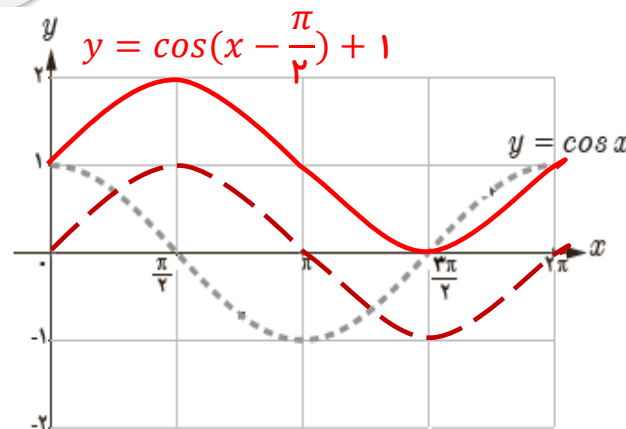


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	2	1	0	1

(۱) برای رسم این نمودار ابتدا باید نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت محور x ها انتقال دهیم.



(۲) سپس نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.



تمرین تکمیلی

۷ $y = \frac{1}{2} \sin x$, $[0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

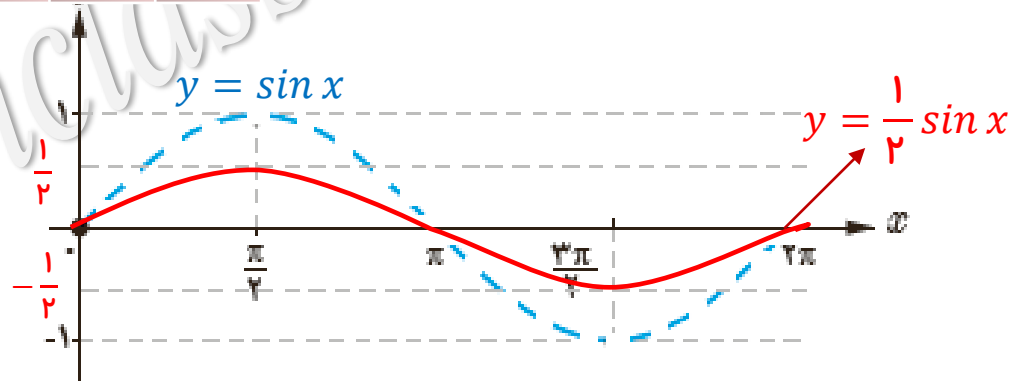


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x \leq \frac{1}{2}$$

چون برد این تابع بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ است، برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را روی بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ انقباض دهیم.

منقبض شده تابع $y = \sin x$



تمرین تکمیلی

۸ $y = ۲ \cos x + ۱$, $[-۲\pi, ۲\pi]$

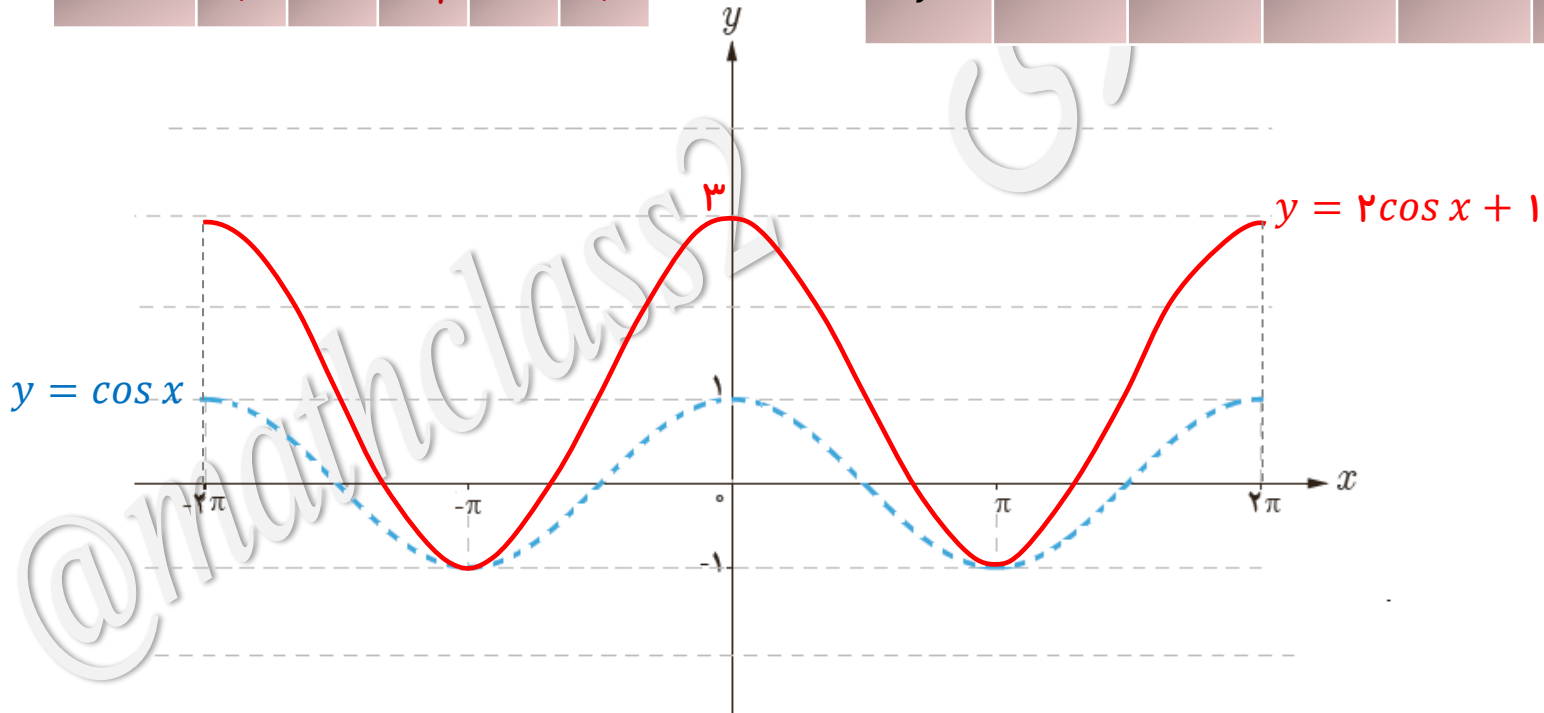
$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Rightarrow -2 + 1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 2 + 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2 \cos x + 1 \leq 3$$

x	\cdot	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\cos x$	۱	\cdot	-۱	\cdot	۱



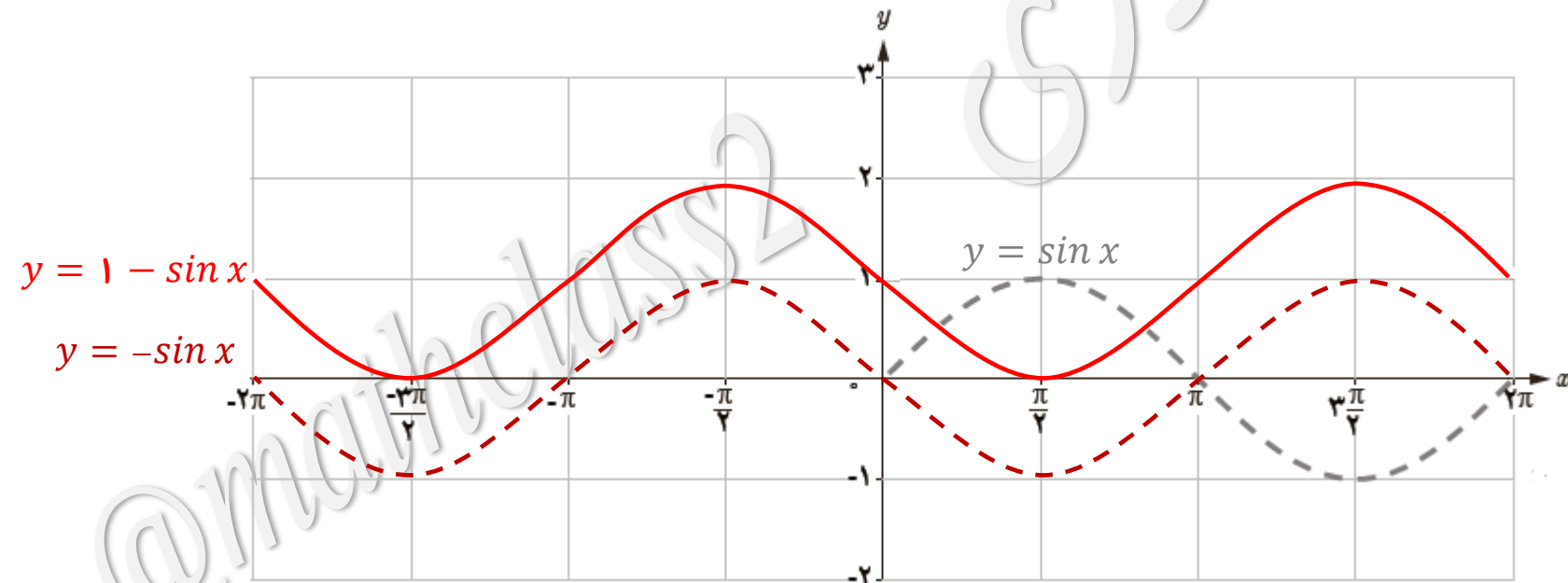
x	-۲π	$-\pi$	\cdot	π	۲π
y	۳	-۱	۳	-۱	۳



تمرین تکمیلی

$$9 \quad y = 1 - \sin x \quad , \quad [-2\pi, 2\pi]$$

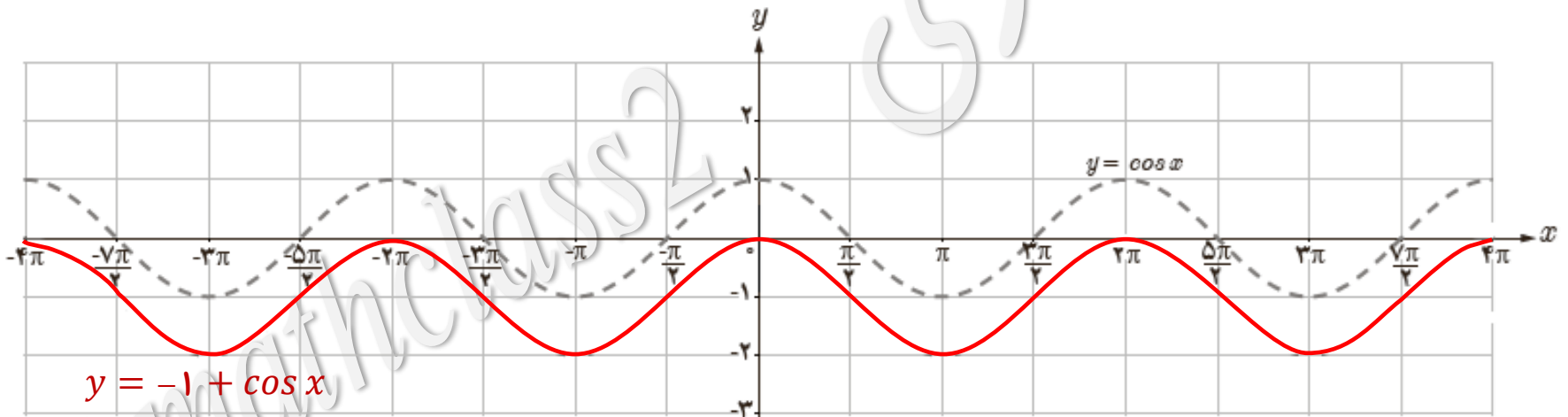
برای رسم این نمودار ابتدا باید نمودار تابع $y = \sin x$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم، سپس نمودار حاصل را به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.



تمرین تکمیلی

$$۱۰ \quad y = -1 + \cos x \quad , \quad [-4\pi, 4\pi]$$

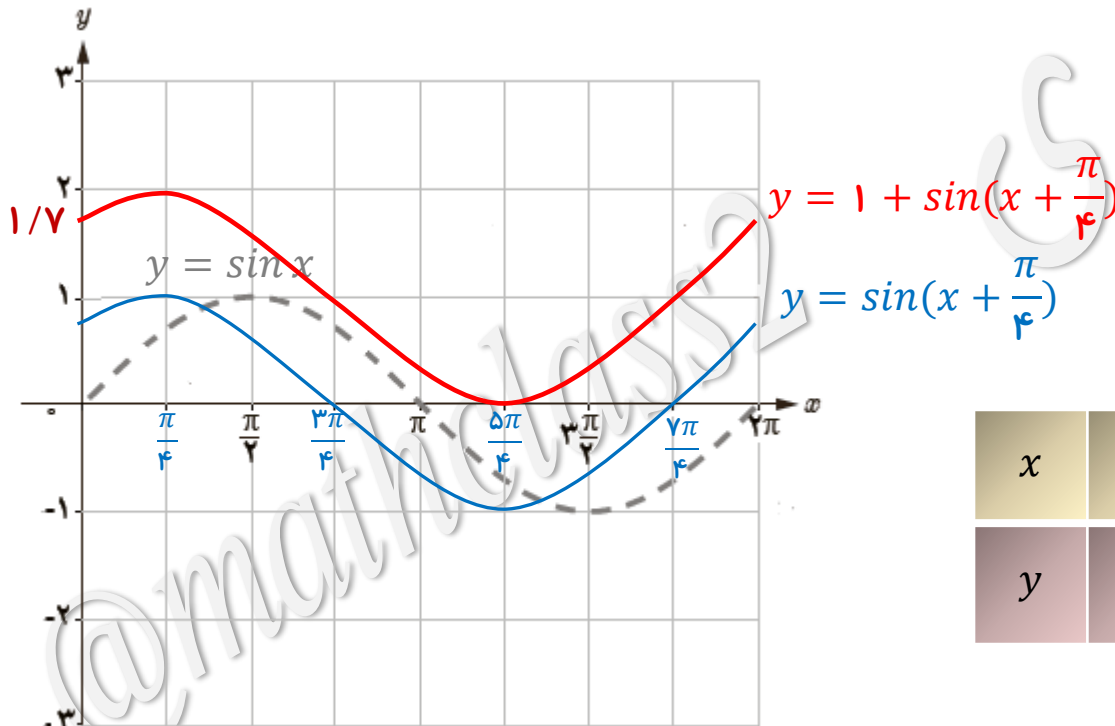
برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه یک واحد در جهت منفی محور y ها انتقال دهیم.



تمرین تکمیلی

⑪ $y = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $[0, 2\pi]$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ در جهت منفی محور x ها و به اندازه یک واحد در جهت مثبت محور y ها انتقال دهیم.

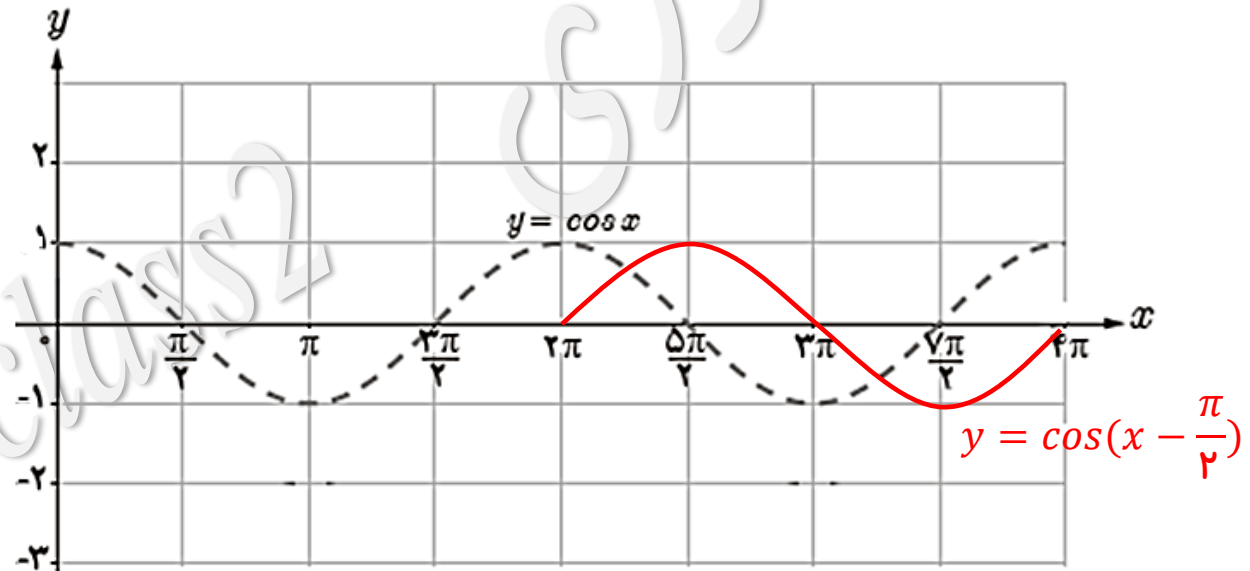


x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	$1/\sqrt{2}$	2	1	0	1	$1/\sqrt{2}$

تمرین تکمیلی

$$12 \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad [2\pi, 4\pi]$$

برای رسم این نمودار کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثبت محور x ها انتقال دهیم.

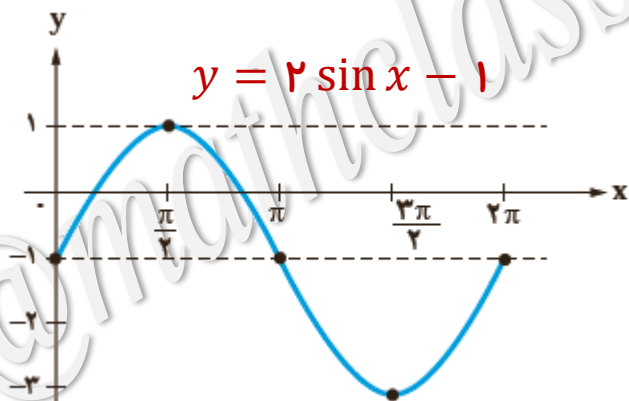
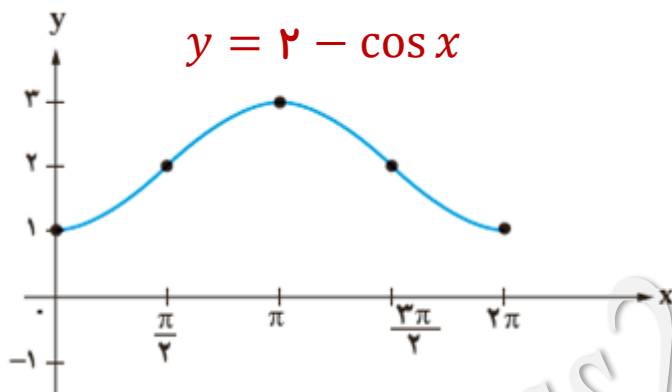


به دامنه در هنگام رسم دقت شود.

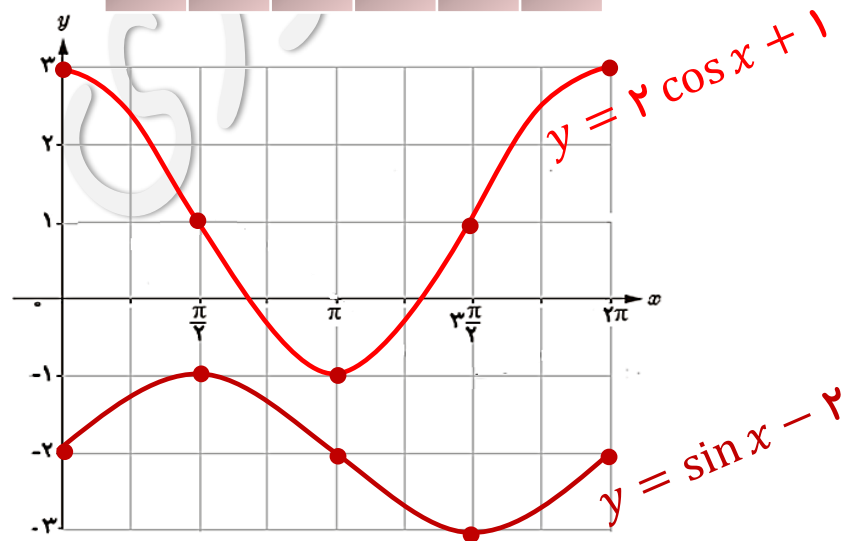
تمرین تکمیلی

سوال ۶: با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هر یک از دو نمودار زیر در بازه $[0, 2\pi]$ کدام یک از ضابطه های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه ها را نیز رسم کنید.

- الف) $y = 2 \cos x + 1$ ب) $y = 2 \sin x - 1$ پ) $y = 2 - \cos x$ ت) $y = \sin x - 2$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	3	1	-1	1	3



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-2	-1	-2	-3	-2

تمرین تکمیلی

سوال ۷: آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه های زیر بر هم منطبق اند یا خیر؟

$$\textcircled{1} \quad y = \sin x \quad \text{و} \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{-\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

نمودار دو تابع بر هم منطبق هستند.

$$\textcircled{2} \quad y = \cos x \quad \text{و} \quad y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

نمودار دو تابع بر هم منطبق هستند.

تمرین تکمیلی

آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه های زیر بر هم منطبق اند یا خیر؟

$$\textcircled{3} \quad y = \cos x \quad \text{و} \quad y = \cos(2\pi - x)$$

$$y = \cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

نمودار دو تابع بر هم منطبق هستند.

$$\textcircled{4} \quad y = \sin x \quad \text{و} \quad y = \sin(5\pi - x)$$

$$y = \sin(5\pi - x) = \sin(4\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = \sin x$$

نمودار دو تابع بر هم منطبق هستند.

تمرین تکمیلی

سوال ۸: مقادیر بیشینه (max) و کمینه (min) توابع زیر را بیابید.

الف) $y = 2 \cos x - 3$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2 \Rightarrow -2 - 3 \leq 2 \cos x - 3 \leq 2 - 3$$

$$\Rightarrow -5 \leq 2 \cos x - 3 \leq -1$$

بیشینه مقدار تابع برابر -1 و کمینه مقدار آن برابر -5 است.

ب) $y = -\sin x - 1$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1 \Rightarrow -1 - 1 \leq -\sin x - 1 \leq 1 - 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq -\sin x - 1 \leq 0$$

بیشینه مقدار تابع برابر صفر و کمینه مقدار آن برابر -2 است.

پ) $y = \frac{\sin x - 2}{2}$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 - 2 \leq \sin x - 2 \leq 1 - 2$$

$$\Rightarrow \frac{-1 - 2}{2} \leq \frac{\sin x - 2}{2} \leq \frac{1 - 2}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq \frac{\sin x - 2}{2} \leq \frac{-1}{2}$$

بیشینه مقدار تابع برابر -0.5 و کمینه مقدار آن برابر -1.5 است.

تمرین تکمیلی

سوال ۹: در تابع $f(x) = a \sin x + b$ مقادیر a و b را طوری بیابید که نمودار تابع از نقطه $M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ عبور کرده و محور طول ها را در نقطه ای به طول $\frac{\pi}{6}$ قطع کند. نمودار این تابع را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

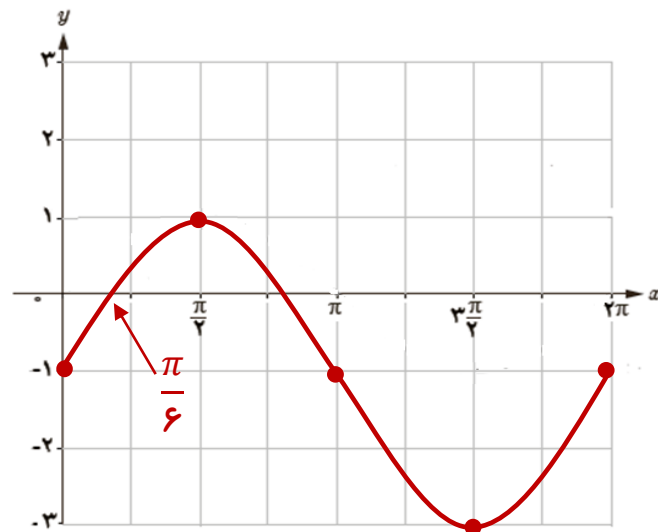
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + b = 1 \Rightarrow a(1) + b = 1 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + b = 0 \Rightarrow a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a + b = 0$$

$$\frac{1}{2}a + b = 0 \xrightarrow{b = 1 - a} \frac{1}{2}a + (1 - a) = 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}a = -1 \Rightarrow a = 2$$

$$b = 1 - a \xrightarrow{a = 2} b = 1 - 2 = -1$$

$$f(x) = a \sin x + b \xrightarrow{\substack{a = 2 \\ b = -1}} f(x) = 2 \sin x - 1$$



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	-1	-3	-1

پایان درس سوم

