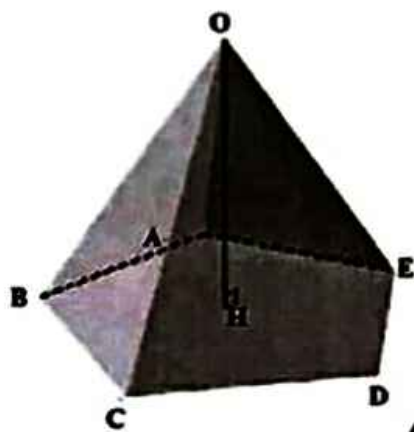




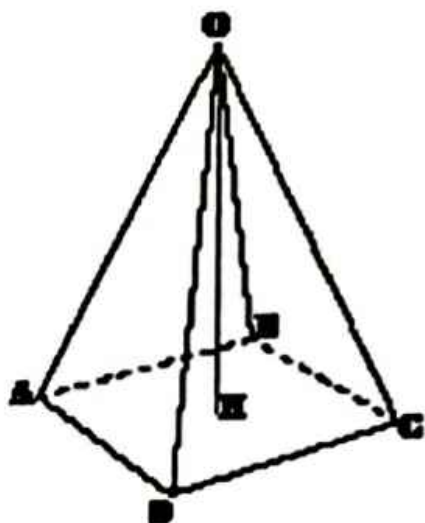
یکی دیگر از حجم‌های هندسی، حجم هرمی است. به طور حتم نام اهرام مصر را شنیده‌اید. سه نمونه دیگر از شکل‌های هرمی را نام ببرید. چادر، مجسمه، پالت سیر
پاستوریزه، سوس، کوه‌ها، درختان کاج -



هرم، یک شکل فضایی است که دارای یک وجه زیرین به نام قاعده است. قاعده هرم، یک چند ضلعی است. مانند شکل مقابل روی تمام محیط این چند ضلعی، سطح‌هایی قرار دارد که در یک نقطه به نام رأس، یکدیگر را قطع می‌کنند. به این سطح‌ها وجه جانبی می‌گویند. در هرم مقابل نام رأس: O ، تعداد وجه‌ها: 5 ، ...
 شکل وجه‌ها: $ABCD$ ، شکل قاعده: $ABCD$ ، نام قاعده: $ABCD$.

به فاصله رأس هرم تا قاعده، یعنی طول عمودی که از رأس بر قاعده رسم می‌شود، ارتفاع هرم می‌گویند. در شکل، OH بر قاعده $ABCD$ عمود است و ارتفاع هرم است. معمولاً برای نام‌گذاری هرم از رأس شروع می‌کنیم؛ به عنوان مثال هرم بالا به صورت $OABCDE$ خوانده می‌شود.

فعالیت



۱- اگر چند ضلعی قاعده، یک چند ضلعی منتظم باشد و وجه‌های جانبی با هم، هم‌نهشت باشد، هرم را منتظم می‌گوییم. در این صورت اگر قاعده، مرکز تقارن داشته باشد، پای ارتفاع (نقطه برخورد ارتفاع و قاعده) روی مرکز تقارن می‌افتد. در هرم منتظم مقابل: نام رأس: O ، ... ارتفاع: OH ، ...
 شکل قاعده: $ABCD$ ، چهارضلعی منتظم شکل وجه‌های جانبی: 4 ، تعداد وجه‌ها: 5 ، ...

درج

۲- الف) با توجه به شکل‌ها و اطلاعات داده شده به نظر شما حجم کدام هرم بیشتر است؟ در

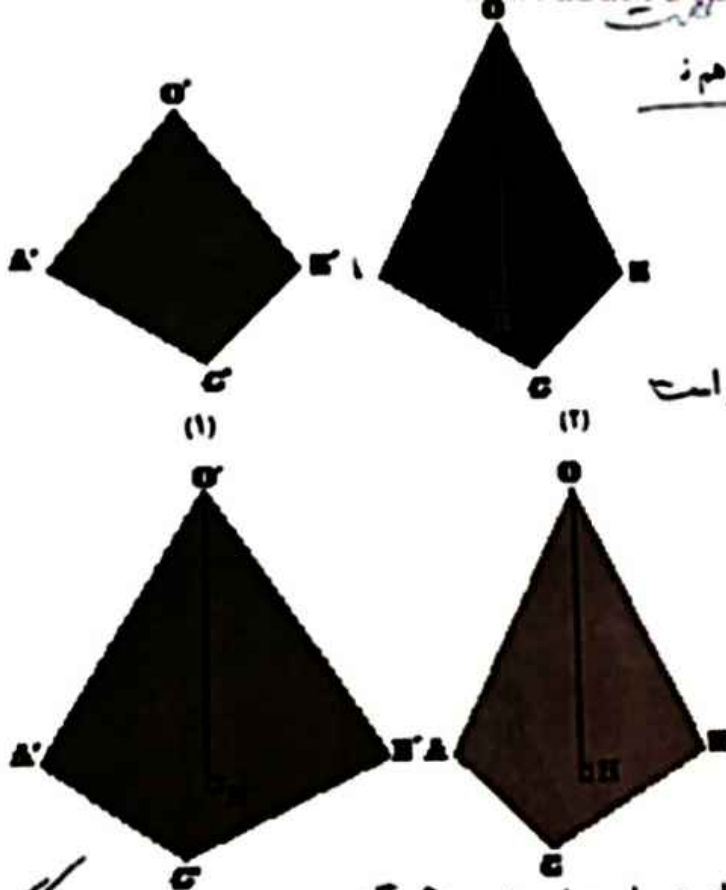
شکل های (۱) و (۲) مثلث های قاعده هم نه

هستند

$$O'H' < OH \Rightarrow V' < V$$

در شکل های (۳) و (۴) ارتفاع ها برابر است

$$S_{ABC} < S_{A'B'C'} \Rightarrow V' > V$$

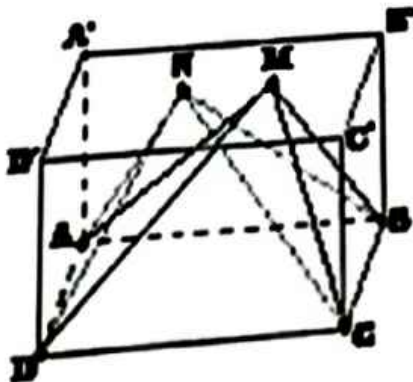


همه ها
✗

با به نظر شما حجم هرم به چه مقادیری وابسته است؟ هم مساحت قاعده و ارتفاع بستگی دارد.
 (چ) برای محاسبه مساحت مثلث از چه مقادیری استفاده می کردید؟ برای محاسبه حجم هرم چه
 مدسی می زنید؟ از قاعده و ارتفاع مثلث - به قاعده و ارتفاع مثلث و ارتفاع هرم
 (د) اگر دو هرم دارای قاعده های با مساحت مساوی و ارتفاع های مساوی باشند، درباره حجم های
 آنها چه می توانید بگویید؟ حجم ها برابر می شوند.

اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع های مساوی باشند، حجم های
 آنها با هم برابر است.

کار در کلاس



در شکل مقابل، ABCD یک وجه یک مکعب مستطیل و
 M و N دو نقطه دلخواه روی وجه مقابل (A'B'C'D') است. چرا
 هرم های MABCD و NABCD دارای حجم های یکسان است؟
 به این ترتیب چند هرم می توان ساخت که با هرم های بالا
 حجم یکسان داشته باشند؟

۱۳۶

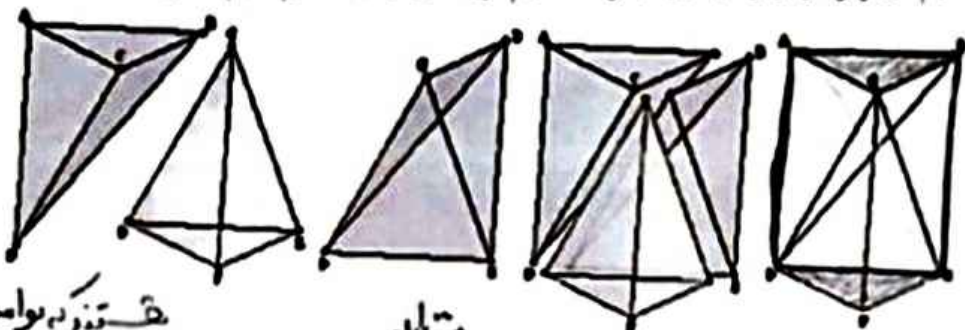
- چون دارای قاعده و ارتفاع برابر می باشند.

بسیار هرم که با تغییر نقطه های M و N می توان هرم های متفاوت دیگری ساخت.

فعالیت

محاسبه حجم هرم

در شکل زیر، منشور با دو فاعده ABC و DEF را ملاحظه می‌کنید. نقطه C را به نقطه‌های E و D و نقطه B را به نقطه D وصل می‌کنیم؛ به این ترتیب منشور را به سه هرم، مطابق شکل تجزیه می‌کنیم. آیا این سه هرم را در این منشور تشخیص می‌دهید؟ با پاسخ دادن به سؤالات زیر، نشان دهید که این سه هرم، حجم‌های برابر دارد و از آنجا نتیجه بگیرید که حجم هر یک از آنها، یک سوم حجم منشور است.



نقطه D به واسطه قطر مستطیل ایجاد شده و مثلث هم‌بافت است.

متساوی

۱- چهار ضلعی $ABED$ ، چه نوع چهار ضلعی است؟ چرا مثلث‌های ABD و BDE هم مساحت دارند؟ چرا این دو مثلث هم‌بافت است؟

۲- چرا هر دو هرم $CBED$ و $CBAD$ دارای حجم‌های برابر است؟ چرا این دو هرم هم‌بافت هستند و مثلث‌های ABD و BDE هم‌بافت است؟

۳- چرا مثلث‌های ABC و DEF هم مساحت دارند؟ چرا این دو مثلث هم‌بافت هستند و مثلث‌های ABD و BDE هم‌بافت است؟

۴- چرا هر دو هرم $DABC$ و $CDEF$ دارای حجم‌های برابر است؟ چرا این دو هرم هم‌بافت هستند و مثلث‌های ABD و BDE هم‌بافت است؟

۵- با توجه به پاسخ سؤالات ۲ و ۳، نتیجه‌ای می‌گیریم؟ این فرمول‌ها $CBED$ ، $CBAD$ و $CDEF$ دارای حجم‌های برابر هستند.

حجم هر هرم با مساحت فاعده S و ارتفاع h برابر است با:

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

کاردرکلاس



۱۳۷

در شکل مقابل هرم $OABC$ دارای فاعده ABC است که در آن $AC = 6\text{cm}$ و $BC = 10\text{cm}$ و زاویه $\hat{ACB} = 90^\circ$ و ارتفاع OH هرم مساری 5cm است. با کامل کردن عبارت‌های زیر حجم هرم را به دست آورید.

$$S_{ABC} = \frac{AC \times CB}{2} = \frac{4 \times 15}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times 30 \times 5 = 50 \text{ cm}^3$$

فعالیت

در شکل زیر، هرم منتظم با قاعده مربع، رسم شده که وجه‌های جانبی آن همگی مثلث‌هایی متساوی‌الساقین و طول ساق‌های آنها ۱۰ cm و M وسط BC است.

۱- پاره خط OM در مثلث OBC چه خواصی دارد؟ عمود منصف BC است.

۲- مثلث OBM چه نوع مثلثی است؟ قائم‌الزاویه.

۳- اگر طول ضلع قاعده، ۱۲ cm باشد به کمک قضیه فیثاغورس $OM^2 = OB^2 - MB^2$ در مثلث OBM طول OM را حساب کنید. $OM = 8 \text{ cm}$



$$\begin{aligned} OH^2 &= OM^2 - MH^2 \\ OH^2 &= 4^2 - 2^2 = 12 \\ OH &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

۴- مثلث OMH چه نوع مثلثی است؟ طول MH جقدر است؟ $MH = 4$

۵- به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث OMH، طول OH را به دست آورید. $OH = 2\sqrt{3}$

۶- حجم هرم OABCD را به دست آورید.

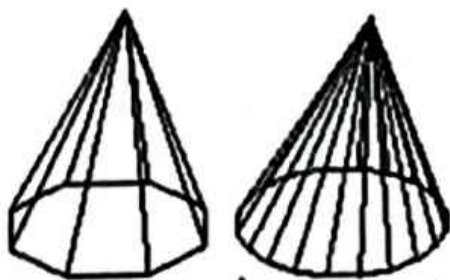
هرم منتظمی را در نظر بگیرید که قاعده آن یک

چندضلعی منتظم باشد. مانند مربع، پنج ضلعی منتظم،

شش ضلعی منتظم و جلال تعداد ضلع‌های این

چندضلعی را بیشتر و بیشتر کنید؛ چند ضلعی فوق به چه

شکلی نزدیک می‌شود؟ هرم به چه شکلی نزدیک می‌شود؟ **دایره - مخروط**



مخروط، شکلی شبیه به هرم منتظم است که قاعده آن به شکل دایره

و پای ارتفاع مخروط مرکز این دایره است.

از اینجا نتیجه می شود که حجم مخروط، مانند حجم هرم از رابطه زیر به دست می آید:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ب}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{ب}} h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

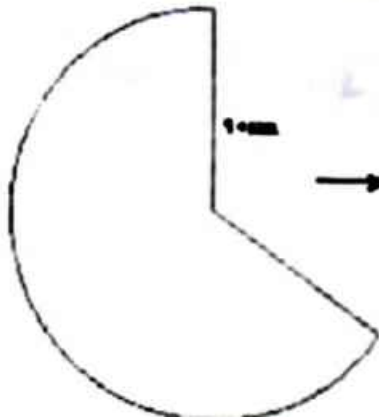


کاردرکلاس

$$h^2 = 10^2 - 4^2$$

$$h^2 = 100 - 16 = 84$$

$$h = 8$$



علی با فستی از دایره
به شعاع 10 cm، مخروطی به قطر
قاعده 12 cm ساخته است. حجم
مخروط را به دست آورید.
 $R = 4$

* پاسی

$$V = \frac{1}{3} \pi \times 4^2 \times 8 = 94 \pi \text{ cm}^3$$