

ریاضی (۱)

تهیه و تنظیم: محسن محمودی

فهرست

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

مجموعه ها	۱
بازه ها	۱۸
الگو و دنباله	۲۵
دنباله حسابی	۴۴
دنباله هندسی	۷۳

فصل دوم: مثلثات

مثلثات	۹۰
دایره ی مثلثاتی	۱۰۴
اتحادهای مثلثاتی	۱۱۲
مساحت مثلث	۱۲۳
رابطه ی شیب خط و تانژانت زاویه	۱۲۷



فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

۱۳۲ اتحادهای جبری

۱۴۶ تجزیه

۱۵۸ توان های گویا

۱۷۳ گویا کردن مخرج کسرها

فصل چهارم: معادله ها و نامعادله ها

۱۸۳ معادله درجه دوم

۲۱۱ سهمی

۲۳۱ تعیین علامت و نامعادله

فصل پنجم: تابع

۲۵۸ زوج مرتب

۲۶۰ تابع

۲۸۰ انواع تابع

۳۰۵ انتقال تابع





فصل ششم: شمارش بدون شمردن

فاکتوریل ۳۱۲

اصل جمع و اصل ضرب ۳۱۹

جایگشت و ترتیب ۳۲۸

ترکیب ۳۴۴

فصل هفتم: آمار و احتمال

احتمال ۳۶۲

آمار ۳۸۷



فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله

□ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

□ درس اول: مجموعه ها

◀ مجموعه :

هر دسته مشخص شده از اشیاء را یک مجموعه و آن اشیاء را اعضای آن مجموعه می نامند.

◀ مجموعه تهی :

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد را مجموعه تهی می نامند و آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نشان می دهند.

◀ دو مجموعه مساوی :

اگر هر عضو مجموعه‌ی A عضوی از مجموعه‌ی B و هر عضو مجموعه‌ی B عضوی از مجموعه‌ی A باشد، این

دو مجموعه را مساوی می نامیم و می نویسیم: $A = B$

◀ زیر مجموعه :

اگر A و B دو مجموعه باشند، بطوریکه هر عضو A عضو B نیز باشد، می گوئیم A زیرمجموعه‌ی B است.

نکته: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

نکته: هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است.

◀ نمایش مجموعه‌ها :

مجموعه‌ها را به سه روش می توان نمایش داد:

۱- نوشتن اعضای آن

۲- نمودار ون

۳- نماد ریاضی

مجموعه‌های ریاضی مهم:

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

مجموعه تمام اعداد حقیقی که گویا نیستند: \mathbb{Q}' : مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

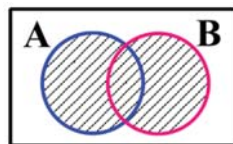
نکته: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

نکته: هر عدد اعشاری که تعداد ارقام اعشار آن بی‌شمار باشد و متناوب نباشد، گنگ است.

نکته: اگر نمایش اعشاری عدد، مختوم یا متناوب باشد، آنگاه گویاست.

اجتماع دو مجموعه:

مجموعه‌ی تمام اعضای است که به A یا B (یا هر دوی آنها) تعلق دارد.



قوانین اجتماع:

① $A \cup B = B \cup A$

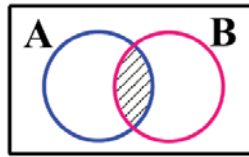
② $A \cup \emptyset = A$

③ $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

④ $\begin{cases} A \subseteq A \cup B \\ B \subseteq A \cup B \end{cases}$

اشتراک دو مجموعه:

مجموعه‌ی تمام اعضای است که هم به A و هم به B تعلق دارند.



قوانین اشتراک:

$$1 \quad A \cap B = B \cap A$$

$$2 \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$3 \quad A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

$$4 \quad \begin{cases} A \cap B \subseteq A \\ A \cap B \subseteq B \end{cases}$$

قوانین ترکیب اجتماع و اشتراک:

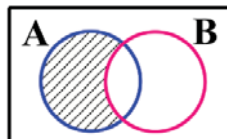
$$1 \quad A \cap B \subseteq B \cup A$$

$$2 \quad \begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

تفاضل دو مجموعه:

تفاضل مجموعه B از مجموعه A مجموعه‌ی تمام اعضای است که به A تعلق دارند ولی به B تعلق ندارند.

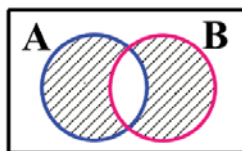

 $A - B$

قوانین تفاضل:

- 1 $\begin{cases} A - A = \emptyset \\ A - \emptyset = A \\ \emptyset - A = \emptyset \end{cases}$
- 2 $A - B \neq B - A$ (مگر موارد خاص)
- 3 $A - B \subseteq A$
- 4 $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset$
- 5 $A - B = A - (A \cap B)$

تفاضل متقارن:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

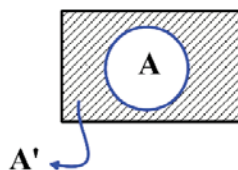


مجموعه مرجع:

مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند را مجموعه مرجع یا مجموعه جهانی می‌نامند و آن را با U یا M نشان می‌دهند.

متمم یک مجموعه:

اگر U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ آنگاه $U - A$ را متمم مجموعه A می‌نامیم و آن را با نماد A' یا A^c نشان می‌دهیم.



◀ قوانین مجموعه‌ی مرجع و متمم:

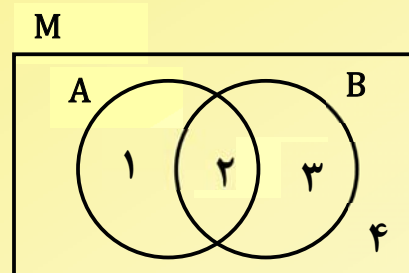
- ① $(A')' = A$
- ② $\begin{cases} \emptyset' = U \\ U' = \emptyset \end{cases}$
- ③ $\begin{cases} A \cup A' = U \\ A \cap A' = \emptyset \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$ (دمورگان)
- ⑤ $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$
- ⑥ $A - B = A \cap B'$

◀ دو مجموعه‌ی جدا از هم:

اگر اشتراک دو مجموعه تهی باشد، آنگاه دو مجموعه را جدا از هم یا مجزا می‌نامند، پس داریم:

- ① $A \cap B = \emptyset$
- ② $A \subseteq B'$
- ③ $A - B = A$
- ④ $B \subseteq A'$
- ⑤ $B - A = B$

نکته: فرض کنید A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، در این روش ابتدا با استفاده از نمودار ون A و B را نمایش داده و به هر کدام از نواحی مجزا، یک شماره نسبت می‌دهیم. سپس می‌توانیم نواحی مختلف را با بیان شماره‌هایشان معرفی کنیم.



$$A = \{1, 2\}$$

$$B = \{2, 3\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$

$$(A \cup B)' = \{4\}$$

✓ **تست:** کدام مجموعه‌ی زیر، تهی نیست؟ (قلمچی)

$N \cap (Z - W)$ (۲)

$W \cap (Z - N)$ (۱)

$Z \cap (R - Q)$ (۴)

$N \cap (Q - Z)$ (۳)

✓ **تست:** اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، مجموعه‌ی $A' - B$ برابر کدام مجموعه‌ی زیر است؟ (قلمچی)

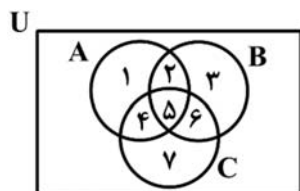
$A \cap B'$ (۲)

$A - B'$ (۱)

$B' - A$ (۴)

$A' \cap B$ (۳)

✓ **تست:** در شکل زیر حاصل $(A \cap B') \cup (B \cap C)$ کدام است؟ (قلمچی)



$\{1, 5, 6\}$ (۲)

$\{1, 6\}$ (۱)

$\{1, 2, 4, 5, 6\}$ (۴)

$\{1, 4, 5, 6\}$ (۳)

✓ تست: اگر $A \cap B = \{a, b, c, d\}$ و $A \cap C = \{b, c, e, f\}$ آنگاه $A - (B - C)'$ کدام است؟ (قلمچی)

(۱) $\{a, c, e, f\}$

(۲) $\{a, d\}$

(۴) $\{b, d\}$

(۳) $\{e, f\}$

✓ تست: اگر A و B دو مجموعه‌ی دلخواه باشند، $(A \cap B) - A$ کدام است؟ (گاج)

(۴) B'

(۳) A'

(۲) \emptyset

(۱) $A \cap B$

✓ تست: اگر $A \subseteq B$ باشد، $(B - A) \cup A$ کدام است؟ (گاج)

(۴) M

(۳) \emptyset

(۲) B

(۱) A

✓ تست: مجموعه‌ی $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$ همواره کدام است؟ (گاج)

$B - A$ (۱) B (۲) A' (۳) \emptyset (۴)

✓ تست: مجموعه‌ی $E = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ مفروض است. کدام یک از گزاره‌های زیر نا درست است؟

(مسابقات ریاضی بلژیک)

$\{1, 2\} \subseteq E$ (۱) $\{1, 2\} \in E$ (۲)

$\emptyset \subseteq E$ (۳) $\{1\} \in E$ (۴)

✓ تست: اگر $A \cup (B - A) = B$ باشد، آنگاه: (کنکور)

$A \subseteq B$ (۱) $B \subseteq A$ (۲)

$A = \emptyset$ (۳) $B = \emptyset$ (۴)

✓ **تست:** اگر $A = \{1, 2, \{1, 2, 3\}\}$ ، $B = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ و $C = \{1, 2, 3\}$ باشند، کدام رابطه درست است؟

(کنکور)

$B - C = \emptyset$ (۲)

$A - B = C$ (۱)

$A - B = \{C\}$ (۴)

$B - C = \{1, 2\}$ (۳)

✓ **تست:** اگر A و B دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند، حاصل $A - (B - (A \cap B))$ کدام است؟ (کنکور)

B (۲)

A (۱)

$A \cup B$ (۴)

$A \cap B$ (۳)

✓ **تست:** اگر دو مجموعه‌ی A و B غیر تهی و $(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $B \cap A'$

برابر کدام است؟ (کنکور)

\emptyset (۴)

A' (۳)

B (۲)

A (۱)

✓ **تست:** اگر $B - A \subseteq (B - A)'$ باشد، آنگاه $A' \cap B'$ کدام است؟ (مبتکران)

(۱) \emptyset (۲) U (۳) A' (۴) B'

✓ **تست:** حاصل عبارت $((A \cup B)' \cup B') \cap A'$ کدام است؟ (مبتکران)

(۱) $A' - B$ (۲) $A - B$ (۳) $A - B'$ (۴) A'

✓ **تست:** متمم مجموعه‌ی $(A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$ کدام است؟ (کنکور)

(۱) A (۲) B' (۳) $A' \cup B'$ (۴) \emptyset

تست: اگر $A_i = \{m \in \mathbb{Z} \mid -i \leq m \leq 8 - i\}$ باشد، مجموعه $\bigcup_{i=1}^{\wedge} A_i - \bigcap_{i=1}^{\wedge} A_i$ چند عضو دارد؟ (کنکور)

۱۴ (۲)

۱۳ (۱)

۱۶ (۴)

۱۵ (۳)

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم باشند، آنگاه $n(A \cap B) = 0$ و در نتیجه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

تست: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه مرجع U و $n(A) = 14$ ، $n(A') = 10$ و $n(B') = 8$ باشند،

آنگاه $n(B)$ کدام است؟ (قلمچی)

۷ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۱۶ (۱)

✓ **تست:** اگر در یک گروه ۲۰ نفر چایی، ۱۲ نفر قهوه، ۵ نفر هم چایی و هم قهوه نوشیده باشند، چند نفر در این گروه چای یا قهوه یا هر دو را نوشیده‌اند؟ (قلم‌چی)

۲۵ (۱) ۲۷ (۲) ۳۷ (۳) ۲۰ (۴)

✓ **تست:** در یک گروه ۴۰ نفری دانش‌آموزی، ۲۵ نفر زبان انگلیسی، ۳۲ نفر زبان عربی و ۶ نفر هیچ‌کدام از این دو زبان را نمی‌خوانند. چه تعداد از دانش‌آموزان هر دو زبان را می‌خوانند؟ (قلم‌چی)

۲۲ (۱) ۲۳ (۲) ۲۱ (۳) ۲۰ (۴)

✓ **تست:** در یک گروه هشت نفری، ۵ نفر عینک می‌زنند و ۶ نفر ساعت دارند. چند نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت دارند؟ (گاج)

(۱) حداکثر ۳ نفر (۲) حداقل ۳ نفر (۳) دقیقاً ۳ نفر (۴) حداقل ۵ نفر

مثال: اگر $n(A) = 15$ ، $n(A \cap B) = 5$ و $n(A \cup B) = 30$ ، آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

(تمرین ص ۱۳ کتاب درسی)

مثال: فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند، به طوری که $n(U) = 100$ ،

$n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است: (تمرین ص ۱۳ کتاب درسی)

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$



مثال: در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش‌آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش‌آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است: (تمرین ص ۱۳ کتاب درسی)

الف) تعداد دانش‌آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.



مثال: در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آنها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی :

مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی باشد را مجموعه متناهی می‌نامند. اگر تعداد اعضای یک مجموعه را نتوان با یک عدد بیان کرد، مجموعه را نامتناهی گویند.

نکته: در بحث متناهی بودن یک مجموعه، بزرگی آن مجموعه اهمیت ندارد. نکته‌ی اساسی آن است که اگر وقت به اندازه کافی داشته باشیم، بتوانیم اعضای مجموعه را بشماریم.

نکته: مجموعه‌ی موش‌های کره زمین، یک مجموعه متناهی است. با اینکه تعداد آنها را نمی‌دانیم، پس ندانستن تعداد اعضای یک مجموعه، دلیلی بر نامتناهی بودن آن مجموعه نیست.

نکته: مجموعه‌ی تهی، مجموعه‌ای متناهی در نظر گرفته می‌شود.

✓ **تست:** کدام مجموعه‌ی زیر متناهی است؟ (قلم‌چی)

- (۱) مجموعه اعداد صحیح بیشتر از ۱-
- (۲) مجموعه اعداد اعشاری بین $0/4$ و $0/7$
- (۳) مجموعه اعداد صحیح ۱۷ رقمی
- (۴) مجموعه اعداد صحیح مکعب کامل و کوچکتر از ۱۰۰۰

✓ **تست:** کدام گزینه در حالت کلی درست نیست؟ (قلم‌چی)

- (۱) اگر مجموعه‌ای دارای یک زیرمجموعه‌ی نامتناهی باشد، آنگاه نامتناهی است.
- (۲) اگر مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه‌ای از آن هم متناهی است.
- (۳) اشتراک دو مجموعه‌ی نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است.
- (۴) اگر حداقل یکی از دو مجموعه، نامتناهی باشد، اجتماع آنها مجموعه‌ای نامتناهی است.

✓ **تست:** اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشند، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

(قلم‌چی)

$$A - (A \cup B) \quad (۴)$$

$$A \cap B \quad (۳)$$

$$B - A \quad (۲)$$

$$A - B \quad (۱)$$

📖 **مثال:** فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد. (تمرین ص ۷ کتاب درسی)

(الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

(ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

(پ) یک زیرمجموعه‌ی متناهی از U بنویسید.

(ت) دو زیرمجموعه‌ی نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید. (تمرین ص ۷ کتاب درسی)

(الف) مجموعه اعداد طبیعی.

(ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۳۶.

(پ) بازه $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.

(ت) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 2\}$

(ث) مجموعه‌ی ضرب‌های طبیعی عدد ۱۰۰.

مثال: اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

(تمرین ص ۷ کتاب درسی)

مثال: \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید. (تمرین ص ۱۲ کتاب درسی)

(الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

(ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

(پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

درس دوم: بازه ها

بازه (فاصله):

زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که مشخص کننده‌ی یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشد را «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم.

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a, b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
بسته	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
نیم باز	$[a, b)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
نیم باز	$(a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
باز	$(a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
نیم باز	$[a, +\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
باز	$(-\infty, a)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
نیم باز	$(-\infty, a]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
باز	$(-\infty, +\infty)$	\mathbb{R}	

مثال: نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = (-1, 3]$ را روی محور زیر رسم کنید و سپس حاصل

(کار در کلاس ص ۵ کتاب درسی)

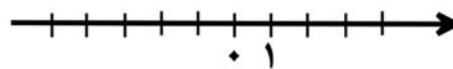
عبارت‌های زیر را بنویسید.

$B - A$ (ت)

$A - B$ (پ)

$A \cup B$ (ب)

$A \cap B$ (الف)





مثال: حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آنها روی یک محور به دست آورید:

(تمرین ص ۷ کتاب درسی)

(ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9)$

(الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5]$

(ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty)$

(پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10]$

(ج) $[2, 4) - (3, +\infty)$

(ث) $(3, +\infty) - [2, 4)$





مثال: مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

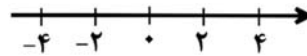
(تمرین ص ۷ کتاب درسی)



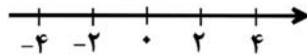
مثال: الف) دو مجموعه‌ی زیر را در نظر بگیرید و اعضای هر یک را روی محور نشان دهید.

(فعالیت ص ۸ کتاب درسی)

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 2\}$$



$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$$



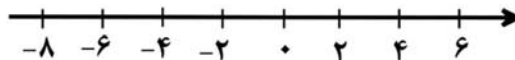
ب) A را با نمایش اعضا و B را به صورت یک بازه بنویسید.

$$A = \{ \quad \quad \quad \}$$

$$B =$$

پ) در مورد A، اگر مجموعه‌ی مرجع را \mathbb{Z} در نظر بگیریم، A' را مشخص کنید.

ت) در مورد B با فرض این که \mathbb{R} مجموعه‌ی مرجع باشد، B' را مشخص کنید و آن را روی محور نمایش دهید.





مثال: \mathbb{R} را به عنوان مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی

محور نشان دهید.

(تمرین ص ۱۲ کتاب درسی)

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \text{ (ب)}$$

$$A = [-2, 3] \text{ (الف)}$$

$$D = (-\infty, 1] \text{ (ت)}$$

$$C = (0, +\infty) \text{ (پ)}$$

☑ **تست:** اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -1\}$ باشند، آنگاه مجموعه‌ی $A \cap B$

شامل چند عدد صحیح می‌باشد؟ (قلم‌چی)

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

✓ تست: حاصل $[1, 12] - [3, 8]$ کدام است؟ (مبتکران)

$[1, 3] \cup [8, 12]$ (۴)

$[1, 3] \cup (8, 12]$ (۳)

$[1, 3] \cup [8, 12]$ (۲)

$[1, 3) \cup (8, 12]$ (۱)

✓ تست: اگر $A_i = \left[\frac{-i}{2}, \frac{8-i}{3} \right]$ باشد، آنگاه مجموعه $A_4 - A_2$ کدام است؟ (قلمچی)

$[-2, -1]$ (۴)

$[-2, -1)$ (۳)

$[-2, -1) \cup \left(\frac{4}{3}, 2 \right]$ (۲)

$[-2, -1] \cup \left[\frac{4}{3}, 2 \right]$ (۱)

✓ تست: اگر $A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2} \right]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ آنگاه مجموعه $(A_2 \cap A_8) - (A_1 \cap A_7)$ کدام است؟

(کنکور)

\emptyset (۴)

$[-1, 1]$ (۳)

$[-2, -1] \cup [1, 2]$ (۲)

$[-2, -1) \cup (1, 2]$ (۱)

✓ **تست:** کدام یک از اعداد زیر متعلق به مجموعه‌ی $[3, 4] - ((-\infty, 3) \cap [2, 5))$ است؟ (قلم‌چی)

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

✓ **تست:** اگر عدد ۴ متعلق به بازه‌ی $(m + 2, 4m + 8)$ باشد، حدود m کدام است؟ (مبتکران)

-۱ < m < ۲ (۲)

-۴ < m (۱)

-۴ < m < ۲ (۴)

m < ۲ (۳)

✓ **تست:** اگر $[-1, b] \cup [a, 7] = [-2, 9]$ باشد، آنگاه $b - a$ کدام است؟ (گاج)

۱۲ (۴)

۱۱ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

☑ **تست:** اگر $(-\infty, 2 - \frac{m-1}{3}] \cap [m-3, +\infty)$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد، مقدار m کدام است؟ (نشرالگو)

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) -۱

☑ **تست:** اگر $(-\infty, \frac{3m+5}{7}] \cup (\frac{m-1}{2}, +\infty) = \mathbb{R}$ باشد، محدوده‌ی m کدام است؟ (کاج)

- (۱) $m = 18$ (۲) $m \geq 17$ (۳) $m > 17$ (۴) $m \leq 17$

□ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

□ درس سوم: الگو و دنباله

◀ الگو:

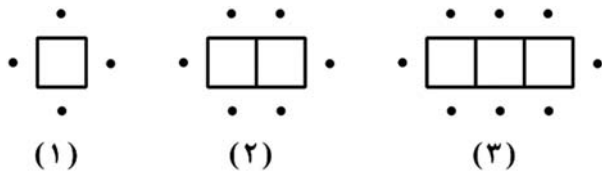
الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشد کننده و یا ترکیبی از این دو باشند.

◀ الگوی خطی:

اگر جمله‌ی عمومی یک الگو به صورت $t_n = an + b$ باشد، آن الگو را خطی می‌نامیم. در الگوهای خطی، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، ثابت و برابر با a است.

☑ **تست:** در شکل زیر، مدلی از میز و صندلی‌ها رسم شده است. فرمول مناسب برای تعداد صندلی‌ها در هر

مرحله کدام است؟ (قلم‌چی)



$a_n = 2n + 2$ (۲)

$a_n = n + 3$ (۱)

$a_n = 4n + 2$ (۴)

$a_n = 4n^2$ (۳)

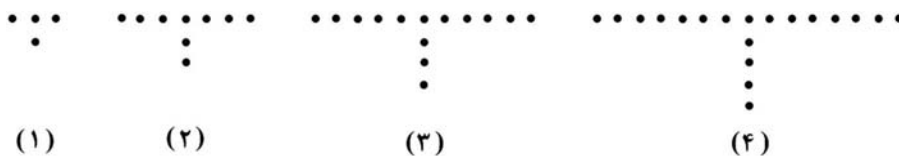
☑ **تست:** در شکل زیر، تعداد نقطه‌ها در طرح هفتم کدام است؟ (قلم‌چی)

۳۷ (۴)


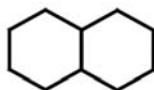
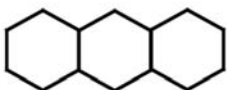
۳۴ (۳)

۲۶ (۲)


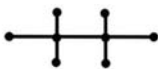
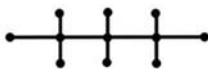
۲۵ (۱)



تست: با توجه به الگوی زیر، در شکل دوازدهم، چند پاره خط وجود دارد؟ (گاج)

	۶۵ (۴)	۶۰ (۳)	۶۱ (۲)	۶۶ (۱)
				
(۱)	(۲)	(۳)		

تست: تعداد نقاط شکل بیستم در الگوی زیر، چند تاست؟ (نشرالگو)

	۶۴ (۴)	۶۲ (۳)	۶۱ (۲)	۶۰ (۱)
				
(۱)	(۲)	(۳)		

تست: در الگوی مقابل، اگر طول اضلاع مثلث‌ها همگی برابر ۱ واحد باشند، به ازای ۲۵ نقطه، چند پاره خط

به طول ۱ واحد وجود دارد؟ (گاج)

	۳۶ (۴)	۳۳ (۳)	۳۹ (۲)	۱۲ (۱)
				
(۱)	(۲)	(۳)		

✓ **تست:** در یک الگوی خطی جمله سوم برابر ۳ و جمله هفتم برابر ۱۱ می‌باشد. جمله چندم این الگو برابر

۲۱ است؟ (گاج)

(۴) سیزدهم

(۳) دوازدهم

(۲) یازدهم

(۱) دهم

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله‌ی عمومی الگو را

(تمرین ص ۱۶ کتاب درسی)

بیابید.

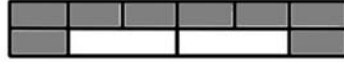


مثال: به الگوی زیر توجه کنید.

(تمرین ص ۲۰ کتاب درسی)



۶ کاشی تیره
۱ کاشی سفید



۸ کاشی تیره
۲ کاشی سفید



۱۰ کاشی تیره
۳ کاشی سفید

الف) شکل بعدی را رسم کنید و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.

ت) برای ۱۰۰ کاشی سفید، چند کاشی تیره لازم است؟

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟



◀ الگوهای غیر خطی:

الگوهایی وجود دارند که خطی نیستند، یعنی اختلاف هر دو جمله متوالی آنها، مقدار ثابت نیست.

معروفترین این الگوها، الگوهای مربعی، مثلثی و الگوی درجه دوم هستند.

◀ الگوی مربعی:

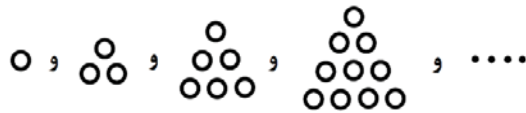


..... و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ : مرحله

..... و $16=4^2$ و $9=3^2$ و $4=2^2$ و ۱ : تعداد دایره‌ها

جمله‌ی عمومی : $a_n = n^2$

◀ الگوی مثلثی:



..... و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ : مرحله

..... و $1+2+3+4$ و $1+2+3$ و $1+2$ و ۱ : تعداد دایره‌ها

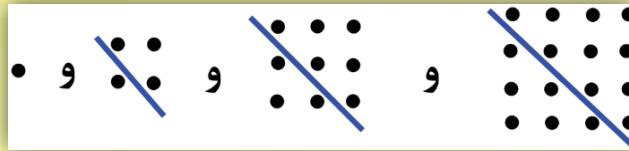
جمله‌ی عمومی : $a_n = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$



نکته: اگر الگوی مثلثی را با $\{a_n\}$ و الگوی مربعی را با $\{b_n\}$ نمایش دهیم، داریم:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 = 1 \\ b_n = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

به کمک شکل نیز می‌توان این موضوع را نشان داد:



$$b_1 = a_1 = 1, \quad b_2 = 1 + 3 = a_1 + a_2$$

$$b_3 = 3 + 6 = a_2 + a_3, \quad b_4 = 6 + 10 = a_3 + a_4$$

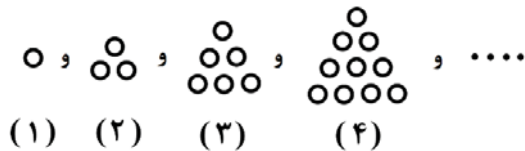
تست: در طرح زیر، تعداد نقطه‌ها در مرحله هشتم چند تاست؟ (قلم‌چی)

۲۹ (۴)

۵۸ (۳)

۴۴ (۲)

۳۶ (۱)



(۱)

(۲)

(۳)

(۴)

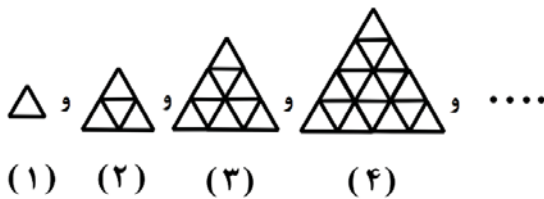
تست: مطابق شکل زیر، در طرح هفتم چند مثلث کوچک داریم؟ (قلم‌چی)

۳۶ (۴)

۴۹ (۳)

۳۵ (۲)

۲۷ (۱)



(۱)

(۲)

(۳)

(۴)



الگوی درجه دوم:

هر الگو با مدل ریاضی $t_n = an^2 + bn + c$ را یک الگوی درجه دوم می‌نامیم. در الگوهای درجه دوم اختلاف جملات متوالی، خود یک الگوی خطی را تشکیل می‌دهند که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی الگوی خطی حاصل برابر با $2a$ می‌باشد.

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad \dots$$


$\xrightarrow{+3}$ $\xrightarrow{+6}$ $\xrightarrow{+9}$

جملات الگوی خطی ۳ و ۶ و ۹ و ... سه تا سه افزایش می‌یابد پس داریم:

$$2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

جمله‌ی عمومی الگو: $t_n = \frac{3}{2}n^2 + bn + c$

(فعالیت ص ۱۷ کتاب درسی)

مثال: با توجه به شکل زیر، جمله‌ی عمومی آن را بنویسید. 

شکل (۱)



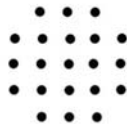
۵ نقطه

شکل (۲)



۱۲ نقطه

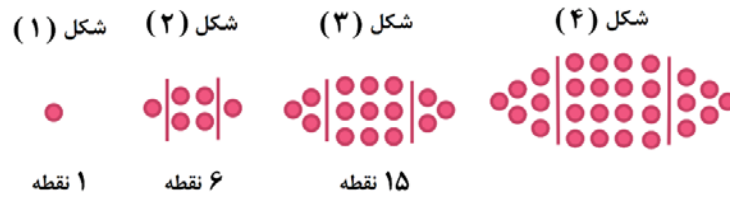
شکل (۳)





(تمرین ص ۲۰ کتاب درسی)

مثال: الگوی زیر را در نظر بگیرید.



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

ب) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟





مثال: جمله‌ی عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آنها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(تمرین ص ۲۰ کتاب درسی)

الف) $a_n = 4n$

ب) $b_n = 3n + 1$

پ) $c_n = n^2 + 2$

ت) $d_n = n^2 + n$



مثال: برای هر یک از دنباله‌های درجه‌ی دو زیرجمله‌ی عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام،

یک الگوی هندسی نظیر کنید.

(تمرین ص ۲۰ کتاب درسی)

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$

ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

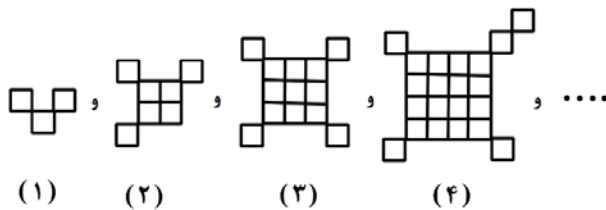
تست: در الگوی مقابل، شکل شماره‌ی ۹ چند مربع کوچک دارد؟ (قلم‌چی)

(۱) ۹۱

(۲) ۸۷

(۳) ۸۳

(۴) ۷۹



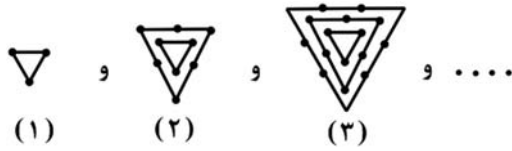
✓ **تست:** با توجه به الگوی زیر، شکل ششم از چند نقطه تشکیل شده است؟ (قلم چی)

۶۳ (۴)

۵۳ (۳)

۴۳ (۲)

۳۲ (۱)



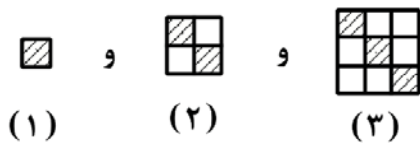
✓ **تست:** در الگوی شکل زیر، تعداد مربع‌های سفید شکل دهم کدام است؟ (گاج)

۹۵ (۴)

۹۰ (۳)

۸۰ (۲)

۱۱۰ (۱)



✓ **تست:** در الگوی مقابل، در مرحله‌ای که تعداد قطعه‌های مربعی رنگی کوچک ۵۰ است، تعداد قطعه‌های

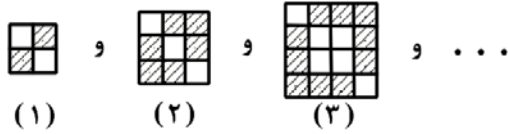
سفید کوچک کدام است؟ (کاج)

۱۱۹ (۱)

۱۴۶ (۲)

۱۶۹ (۳)

۱۹۶ (۴)



◀ **دنباله:**

هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامند. این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شوند. دنباله‌ها را به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

که در آن a_1 جمله‌ی اول، a_2 جمله‌ی دوم و به همین ترتیب a_n جمله‌ی n ام یا جمله‌ی عمومی نامیده می‌شود.

✓ **تست:** اگر جمله‌ی عمومی الگوی ...، ۲۸، ۱۸، ۱۰، ۴ به صورت $t_n = an^2 + bn$ باشد، جمله‌ی دهم دنباله کدام است؟ (گاج)

۱۳۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۱۱۰ (۲)

۱۰۰ (۱)

✓ **تست:** مجموع ۴۸ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ کدام است؟ (گاج)

-۵ (۴)

-۶ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

✓ **تست:** جمله‌ی عمومی دنباله‌ای $a_n = \frac{3n^2 - n}{n^2 - 3}$ است کدام جمله این دنباله برابر ۳ است؟ (مبتکران)

(۱) جمله دوم (۲) جمله پنجم (۳) جمله نهم (۴) جمله سوم

✓ **تست:** اگر چند جمله‌ای اول یک دنباله به صورت $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$ باشد، جمله‌ی عمومی آن کدام است؟

(قلم چی) $a_n = \frac{2n+1}{n}$ (۲) $a_n = \frac{2n-1}{n}$ (۱)

$a_n = \frac{2n-1}{2n}$ (۴) $a_n = \frac{2n+1}{2n}$ (۳)

☑ تست: اگر $a_n = \frac{n-2}{4n-5}$ و $b_n = \frac{3n-6}{12n}$ جمله‌ی مشترک دو دنباله کدام است؟ (نشرالگو)

(۴) صفر

(۳) $\frac{1}{7}$

(۲) $\frac{1}{6}$

(۱) $\frac{1}{5}$

☑ تست: رابطه‌ی $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ بین جملات یک دنباله برقرار است. اگر $U_1 = U_2 = 1$ باشد، جمله‌ی

نهم این دنباله کدام است؟ (کنکور)

(۴) ۳۲

(۳) ۳۳

(۲) ۳۴

(۱) ۳۵

✓ تست: در یک دنباله‌ی اعداد، $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم $a_n = 2a_{n-1} + 1$ جمله‌ی هشتم این دنباله کدام است؟ (کنکور)

۲۵۵ (۴)

۲۴۷ (۳)

۱۵۹ (۲)

۱۲۷ (۱)

✓ تست: در دنباله‌ی اعداد $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ جمله‌ی بیست و سوم کدام است؟ (کنکور)

۵۷۶ (۴)

۵۲۹ (۳)

۵۱۷ (۲)

۴۸۴ (۱)

☑ **تست:** اگر دنباله‌ای ثابت باشد و تساوی $a_{n+1} = 2 + \frac{2}{3}a_n$ همواره برقرار باشد، آنگاه مجموع ۲۰ جمله‌ی

اول آن کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$) (مبتکران)

۱۴۰ (۴)

۱۳۰ (۳)

۱۲۰ (۲)

۱۱۰ (۱)

☑ **تست:** در دنباله‌ی $a_n = 140n - 5n^2$ چند جمله‌ی مثبت وجود دارد؟ (نشرالگو)

بی‌نهایت (۴)

صفر (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

✓ **تست:** اگر جملهی $(3n - 2)$ ام یک دنباله به صورت $\frac{2\sqrt{n+5}}{n^2+3}$ باشد، جملهی هفتم این دنباله کدام است؟

(گاج) $\frac{\sqrt{2}}{13}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۲) $\frac{\sqrt{8}}{12}$ (۱)

✓ **تست:** جملهی $(2n - 1)$ ام یک دنباله بر حسب n برابر است با $\frac{4n^2+1}{2n+1}$ ، جملهی عمومی a_n کدام است؟

(مبتکران) $\frac{n^2-1}{n-2}$ (۲) $\frac{n^2+2n+2}{n+2}$ (۱)
 $\frac{n^2-2n+2}{n-2}$ (۴) $\frac{4n^2-1}{2n-1}$ (۳)

☑ تست: دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{4n + 13}{n - 1}$ چند جمله به صورت عدد صحیح دارد؟ (مبتکران)

۴ بی‌شمار

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

□ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

□ درس چهارم: دنباله حسابی

◀ دنباله‌ی حسابی:

دنباله‌ای است که هر جمله آن (به‌غیر از جمله اول) از افزودن یک مقدار ثابت به جمله‌ی قبلی بدست می‌آید. یک دنباله حسابی دنباله‌ای است به‌صورت:


$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \dots$$

که در آن a_1 جمله‌ی اول و d قدرنسبت دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی عمومی یک دنباله حسابی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

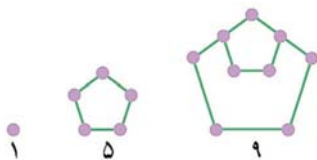
نکته: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی، یک الگوی خطی است. یعنی جمله‌ی عمومی آن به‌صورت $a_n = an + b$ است، که در آن ضریب n ، یعنی عدد a ، قدرنسبت دنباله است.

(مثال ص ۲۳ کتاب درسی)

مثال: در دنباله‌ی حسابی زیر جمله شانزدهم را به‌دست آورید. 

۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ...

مثال: الف) دو جمله بعدی الگوی مقابل را با رسم شکل بیابید و نوع دنباله را مشخص کنید.



ب) جمله عمومی آن را مشخص کنید. (تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

مثال: از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آن‌ها با تعیین قدرنسبت

جمله بیست و یکم را بیابید. (تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

الف) ۳, ۱۰, ۱۷, ۲۴, ...

ب) ۱, ۲, ۴, ۸, ...

پ) $\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots$

ت) ۱۰, ۷, ۴, ۱, ...

ث) $\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1, \dots$

ج) ۲, ۲, ۲, ۲, ...



مثال: مسئله‌ی زیر در پاپیروس رایند آمده است. آن را حل کنید. (تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

« ۱۰۰ قرض نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم‌های دریافت شده، دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگ‌تر، مساوی مجموع دو سهم کوچک‌تر باشد.»

☑ **تست:** کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله‌ی حسابی است؟ (کنکور)

$$t_n = n^3 + n \quad (۴) \quad t_n = \frac{1}{n} \quad (۳) \quad t_n = n^2 \quad (۲) \quad t_n = 8n + 1 \quad (۱)$$

☑ **تست:** اگر $a_n = (2k - 1)n^2 - kn + 2$ جمله عمومی یک دنباله حسابی باشد، جمله‌ی دوم دنباله کدام است؟ (نشرالگو)

$$۳ \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳) \quad ۱ \quad (۲) \quad \text{صفر} \quad (۱)$$

✓ **تست:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی جمله‌ی عمومی به صورت $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2}$ باشد، قدرنسبت کدام است؟

(گاج)

۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۴ (۲)

۳/۵ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله‌ی حسابی، بین جملات رابطه‌ی $2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8$ برقرار است. حاصل

$5a_1 - 3a_2 - 2a_3$ کدام است؟ (گاج)

۸ (۴)

 $\frac{8}{7}$ (۳) $-\frac{8}{7}$ (۲)

-۸ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله‌ی حسابی مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۳- و مجموع سه جمله‌ی بعدی برابر ۲۴ است.

حاصل ضرب جمله‌ی اول و قدرنسبت دنباله کدام است؟ (نشرالگو)

-۱۲ (۴)

-۱۰ (۳)

-۶ (۲)

-۸ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله‌ی حسابی $a_1 + a_3 + a_8 = 12$ می‌باشد. اگر $a_3 + a_k = 8$ باشد، k کدام است؟ (گاج)

۴ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

✓ **تست:** قطار سریع‌السیری به طور آزمایشی، فاصله‌ی دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می‌شود. تا مدت زمان این مسافت به ۲ ساعت پیش‌بینی شده برسد، تعداد نوبت‌های آزمایشی کدام است؟ (کنکور)

۲۵ (۴)

۲۴ (۳)

۲۰ (۲)

۱۶ (۱)

◀ **واسطه حسابی بین دو عدد:**

اگر x و y و z سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، به y واسه‌ی حسابی گفته می‌شود و داریم:

$$y = \frac{x+z}{2}$$

(تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

مثال: الف) واسطه‌ی حسابی بین ۵ و ۱۱ چه عددی است؟ 

ب) واسطه‌ی حسابی بین ۲۰ و ۴۰ چه عددی است؟

پ) از دو قسمت قبل چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

☑ **تست:** اعداد $2p + 3$ و $3p + 4$ و $5p - 1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (کنکور)

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

☑ **تست:** سه جمله اول دنباله‌ای حسابی $3a + 1$ و $5a - 11$ و $2a - 3$ هستند. جمله‌ی چندم این دنباله برابر با ۲۰۱۷ است؟ (نشرالگو)

۵۰۵ (۴)

۵۰۴ (۳)

۵۰۳ (۲)

۵۰۲ (۱)

✓ **تست:** جمله‌ی چندم از دنباله حسابی ...، ۷، ۱، $2k - 1$ ، ۳- برابر ۳۲ است؟ (قلم‌چی)

(۱) هفتم (۲) هشتم (۳) نهم (۴) دهم

نکته: اگر دو جمله‌ی a_m و a_n از یک دنباله‌ی حسابی موجود باشند، آنگاه قدرنسبت از رابطه زیر

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

بدست می‌آید:

نکته: اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه حسابی قرار دهیم که با آنها دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند

آنگاه قدرنسبت دنباله‌ی حاصل از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

نکته: تعداد جمله‌های دنباله‌ای حسابی که جمله‌ی اولش a_1 ، جمله‌ی آخرش a_n و قدرنسبت آن d

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

است برابر است با:

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند.

(کاردکلاس ص ۲۳ کتاب درسی)

مثال: در یک دنباله حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید. یعنی

با به دست آوردن جمله اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید. (تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

تست: در دنباله‌ای حسابی $a_4 = 5$ و $a_9 = 30$. جمله‌ی عمومی این دنباله کدام است؟ (نشرالگو)

$$2n - 3 \quad (4)$$

$$4n - 11 \quad (3)$$

$$3n - 7 \quad (2)$$

$$5n - 15 \quad (1)$$

✓ **تست:** بین دو عدد ۳ و ۹۳ پنج واسطه حسابی درج می‌کنیم. عدد وسطی کدام است؟ (نشرالگو)

۵۲ (۴)

۵۰ (۳)

۴۸ (۲)

۴۵ (۱)

✓ **تست:** اگر جمله $(2n - 1)$ ام یک دنباله‌ی حسابی به صورت $8n - 5$ باشد، قدرنسبت این دنباله کدام

است؟ (قلم‌چی)

 $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

✓ **تست:** مجموع جملات اول و سوم یک دنباله حسابی ۸ و حاصل ضرب جملات دوم و چهارم ۴۰ است.

قدرنسبت دنباله چقدر است؟ (گاج)

$$5 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

✓ **تست:** اگر $2b, a, 2a - 4, b - a, \dots$ جملات یک دنباله حسابی باشند. جمله‌ی هشتم این دنباله

کدام است؟ (قلم‌چی)

$$\frac{-21}{2} \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$-6 \quad (2)$$

$$\frac{-13}{2} \quad (1)$$

✓ **تست:** بین دو عدد حقیقی و متمایز $k + \sqrt{k}$ و $\sqrt{k} - k$ چند عدد برحسب k باید قرار دهیم تا اعداد حاصل تشکیل یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۱ بدهند؟ ($k \in \mathbb{N}$) (قلم‌چی)

$2k - 2$ (۴)

$2k - 1$ (۳)

$2k + 1$ (۲)

$2k$ (۱)

✓ **تست:** در دنباله‌ی حسابی ۷، ۱۴، ۲۱، ...، ۱۰۵ چند جمله وجود دارد؟ (قلم‌چی)

17 (۴)

15 (۳)

14 (۲)

13 (۱)

تست: دنباله‌ی حسابی $۲۰ + ۳k, \dots, ۸, ۵$ چند جمله دارد؟ (گاج)

$k + ۳$ (۴)

$k + ۶$ (۳)

$۲k + ۲۰$ (۲)

k (۱)

تست: بین دو عدد $x = m^2 + ۳m + ۴$ و $y = m^2 + ۴$ تعداد $m - ۱$ عدد را طوری درج می‌کنیم که اعداد

حاصل یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند. قدرنسبت دنباله‌ی حاصل کدام است؟ $x > y$ (نشرالگو)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

✓ **تست:** اگر عددهای ناصفر a_1, a_2, \dots, a_n جمله‌های دنباله‌ای حسابی باشند، حاصل

کدام است؟ (نشرالگو) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$

$$\frac{d}{a_1 a_n} \quad (۴)$$

$$\frac{n+1}{a_1 a_n} \quad (۳)$$

$$\frac{n}{a_1 a_n} \quad (۲)$$

$$\frac{n-1}{a_1 a_n} \quad (۱)$$

✓ **تست:** اگر a_n دنباله‌ای حسابی باشد، آنگاه حاصل $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19} a_{20}}$ کدام است؟ (مبتکران)

$$\frac{39}{a_1 a_{20}} \quad (۴)$$

$$\frac{20}{a_1 a_{20}} \quad (۳)$$

$$\frac{19}{a_1 a_{20}} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{a_1 a_{20}} \quad (۱)$$

☑ **تست:** تصاعد حسابی به جمله‌ی اول 63 و قدرنسبت 4 - چند جمله‌ی مثبت دارد؟ (کنکور)

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

☑ **تست:** در دنباله‌ی حسابی $\dots, 10, 6, 2$ چند جمله‌ی کوچکتر از 500 وجود دارد؟ (نشرالگو)

۱۲۸ (۴)

۱۲۶ (۳)

۱۲۵ (۲)

۱۲۰ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله حسابی، جمله‌ی اول ۱۴-، جمله‌ی آخر ۴۰ و تعداد جمله‌ها ۹۱ است. این دنباله چند

جمله‌ی مثبت دارد؟ (قلم‌چی)

۶۷ (۴)

۴۵ (۳)

۳۳ (۲)

۲۴ (۱)

✓ **تست:** چند عدد دو رقمی بر ۷ بخش پذیرند؟ (نشرالگو)

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

✓ **تست:** تعداد عددهای سه رقمی مضرب ۳ که کوچکتر از ۲۰۰ باشند، کدام است؟ (قلمچی)

۳۳ (۴)

۳۱ (۳)

۲۷ (۲)

۲۵ (۱)

✓ **تست:** چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که باقی مانده تقسیم آنها بر ۴ برابر ۱ باشد؟ (قلمچی)

۲۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۰ (۲)

۲۱ (۱)



نکته: اگر بین اندیس‌های چهار جمله‌ی دلخواه از یک دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی $m + n = p + q$

برقرار باشد، اصطلاحاً می‌گوییم این جملات متساوی‌الفاصله هستند و داریم:

$$m + n = p + q \Rightarrow a_m + a_n = a_p + a_q$$

در این قانون تعداد اندیس‌ها در دو طرف تساوی باید برابر باشد.

مثلاً: $5 + 7 = 12$ ولی $a_5 + a_7 \neq a_{12}$ ، زیرا سمت چپ شامل دو اندیس ۵ و ۷ ولی سمت راست فقط شامل اندیس ۱۲ است.

✓ **تست:** اگر در یک دنباله‌ی حسابی a_n جمله‌ی n ام و $a_8 + a_7 = 32$ باشد، آنگاه $a_7 + a_5 + a_3$ کدام

است؟ (گاج)

۶۴ (۴)

۵۴ (۳)

۴۸ (۲)

۴۰ (۱)

✎ **مثال:** در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. دنباله را

مشخص کنید. (تمرین ص ۲۴ کتاب درسی)

✓ **تست:** اعداد $2x+1$ ، $3x+6$ و $5x-10$ ، جملات سوم، پنجم و هفتم از یک دنباله‌ی حسابی هستند.

مقدار x کدام است؟ (مبتکران)

۲۱ (۴)

۱۷ (۳)

۴ (۲)

۷ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جمله‌های هفتم و سیزدهم برابر a و جمله‌ی نهم برابر b است.

جمله‌ی یازدهم کدام است؟ (گاج)

$a + \frac{b}{2}$ (۴)

$\frac{a}{2} + b$ (۳)

$a - b$ (۲)

$a + b$ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات اول، دوم و سوم، ۱۲ و مجموع جملات هفتم و نهم ۳۲ است.

قدرنسبت دنباله کدام است؟ (گاج)

$$\frac{1}{2} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۳)}$$

$$2 \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{2} \text{ (۱)}$$

✓ **تست:** بین دو عدد ۷ و ۴۹ نه جمله طوری درج شده است که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود. جمله‌ی

وسط کدام است؟ (نشرالگو)

$$31 \text{ (۴)}$$

$$30 \text{ (۳)}$$

$$29 \text{ (۲)}$$

$$28 \text{ (۱)}$$

✓ **تست:** اگر در یک دنباله حسابی $a_3 + a_4 = 20$ باشد، حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ کدام

است؟ (گاج)

۸۰ (۴)

۶۰ (۳)

۵۰ (۲)

۴۰ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله حسابی، مجموع ۵ جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم

چند برابر جمله اول است؟ (کنکور)

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

تست: اگر در یک دنباله حسابی $a_{13} = 30$ و $a_{15} - a_{11} = 120$ باشد، جمله بیستم کدام است؟ (مبتکران)

۳۷ (۴)

۳۵ (۳)

۳۶ (۲)

۳۳/۵ (۱)

تست: اگر در یک دنباله حسابی $t_{28} = 60$ و $t_{26} - t_{24} = 240$ باشد، جمله ۳۵ ام کدام است؟ (قلمچی)

۶۶ (۴)

۶۲/۵ (۳)

۵۶ (۲)

۶۳/۵ (۱)

✓ **تست:** مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله‌ی حسابی نزولی ۳۰ و حاصل ضرب آن‌ها ۹۱۰ است. قدرنسبت

دنباله کدام است؟ (مبتکران)

$$-4 \ (4)$$

$$-3 \ (3)$$

$$4 \ (2)$$

$$3 \ (1)$$

✓ **تست:** اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند، اگر اندازه‌ی ضلع وسط ۸ باشد،

قدرنسبت کدام؟ (مبتکران)

$$4 \ (4)$$

$$3 \ (3)$$

$$2 \ (2)$$

$$1 \ (1)$$

☑ **تست:** زوایه‌های یک پنج‌ضلعی، دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند. اگر اندازه کوچکترین زاویه‌ی آن برابر با 28° باشد، اندازه بزرگترین زاویه کدام است؟ (نشرالگو)

68° (۴)

108° (۳)

188° (۲)

148° (۱)

☑ **تست:** زوایای داخلی یک پنج‌ضلعی محدب به ترتیب از کوچک به بزرگ تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها 540° درجه و بزرگترین آنها 136° درجه باشد، قدرنسبت این دنباله چند درجه است؟

(قلم‌چی)

20 (۴)

16 (۳)

12 (۲)

14 (۱)

☑ **تست:** زوایای داخلی یک پنج ضلعی محدب به ترتیب از کوچک به بزرگ تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر مجموع آن‌ها ۵۴۰ درجه و بزرگترین آن‌ها ۱۳۶ درجه باشد، قدرنسبت این دنباله چند درجه است؟

(۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰ (قلم‌چی)

☑ **تست:** مجموع پنج جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی برابر ۲۰ و مجموع مربعات آن‌ها برابر ۱۷۰ است. مربع قدرنسبت کدام است؟ (نشرالگو)

(۱) ۴ (۲) ۹ (۳) $\frac{۹}{۴}$ (۴) ۱۶

نکته: جملات مشترک دو دنباله‌ی حسابی a_n و b_n خود تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند که قدرنسبت آن «ک.م.م» قدرنسبت‌های دنباله‌های a_n و b_n است.

☑ **تست:** بیست جمله‌ی اول و دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $a_1 = 3$ و قدرنسبت $d_1 = 2$ و نسبت جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول $b_1 = 2$ و قدرنسبت $d_2 = 3$ چند جمله‌ی مساوی دارند؟ (مشابه کنکور)

۹(۴)

۸(۳)

۷(۲)

۶(۱)

☑ **تست:** در دو دنباله‌ی حسابی به صورت‌های $2, 7, 12, \dots$ و $8, 11, 14, \dots$ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟ (کنکور)

۶۱(۴)

۶۰(۳)

۵۹(۲)

۵۸(۱)

✓ **تست:** در بیست جمله‌ی اول از یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف

زوج ۱۵۰ می‌باشد. قدرنسبت کدام است؟ (مشابه کنکور)

$$\frac{5}{3} \text{ (۴)}$$

$$\frac{3}{2} \text{ (۳)}$$

$$\frac{4}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{5}{2} \text{ (۱)}$$

✓ **تست:** اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن

دسته باشد ... , (۷, ۹, ۱۱) , (۳, ۵) , (۱) جمله آخر در دسته‌ی بیستم کدام است؟ (کنکور)

$$۴۲۳ \text{ (۴)}$$

$$۴۲۱ \text{ (۳)}$$

$$۴/۹ \text{ (۲)}$$

$$۴/۵ \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد... (1) , $(3, 5)$, $(7, 9, 11)$, ... (کنکور)

۱۸۵۰ (۴)

۱۸۰۰ (۳)

۱۷۵۰ (۲)

۱۷۰۰ (۱)

☑ **تست:** اعداد طبیعی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره‌ی آن دسته باشد... (1) , $(2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9, 10)$, ... (کنکور)

۴۰۴۰ (۴)

۴۰۳۰ (۳)

۴۰۲۰ (۲)

۴۰۱۰ (۱)

✓ **تست:** اگر به قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی ۲ واحد اضافه کنیم به جمله‌ی پنجم در دنباله‌ی حاصل چند

واحد اضافه می‌شود؟ (گاج)

۱۰(۴)

۸ (۳)

۲(۲)

(۱) صفر

□ فصل اول: مجموعه، الگو و دنباله

□ درس پنجم: دنباله هندسی


◀ دنباله‌ی هندسی :

دنباله‌ای است که هر جمله آن (به غیر از جمله‌ی اول) از ضرب یک عدد ثابت غیر صفر در جمله‌ی قبلی بدست

می‌آید. دنباله‌ی هندسی به صورت روبرو است : a_1, a_1q, a_1q^2, \dots

که در آن a_1 جمله‌ی اول و q قدرنسبت دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی n ام (جمله‌ی عمومی) دنباله‌ی هندسی

از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید : $a_n = a_1q^{n-1}$

مثال: از بین موارد زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کنید و قدرنسبت آنها را بنویسید. 


(تمرین ص ۲۷ کتاب درسی)

الف) $7, 28, 112, 448, \dots$

ب) $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$

پ) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{8}, \dots$

ت) $5, 5, 5, 5, \dots$

مثال: حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی مقابل را محاسبه کنید. 

$2, 4, 8, \dots$

(تمرین ص ۲۷ کتاب درسی)



مثال: علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

(تمرین ۲۷ کتاب درسی)

الف) اگر او بعد از ۳ سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد؟

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

تست: در یک دنباله هندسی جمله‌ی اول ۷ و قدرنسبت ۲ می‌باشد. جمله‌ی چندم این دنباله برابر ۲۲۴

است؟ (کاج)

(۱) پنجم

(۲) ششم

(۳) هفتم

(۴) هشتم



✓ **تست:** در یک دنباله هندسی جمله ی اول ۸ برابر جمله ی چهارم است. جمله ی دوازدهم چند برابر جمله ی دهم است؟ $(a_7 \neq 0)$ (گاج)

۴ (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله هندسی $t_4 - t_2 = 6$ و قدرنسبت دنباله $\sqrt{3}$ است. جمله ی اول کدام است؟ (گاج)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

☑ **تست:** مجموع سه جمله اول یک دنباله هندسی با جملات غیرصفر، $\frac{3}{4}$ برابر مجموع سه جمله دوم

این دنباله است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (قلم چی)

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} \quad (1)$$

☑ **تست:** چهار عدد مثبت، جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. مجموع دو عدد کوچکتر برابر ۲۰ و

مجموع دو عدد بزرگتر ۴۵ است. بزرگترین این اعداد کدام است؟ (کنکور)

$$30 \quad (4)$$

$$29 \quad (3)$$

$$28 \quad (2)$$

$$27 \quad (1)$$

☑ **تست:** حاصل ضرب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی برابر ۸ و حاصل جمع آن‌ها برابر $\frac{62}{5}$ است. عدد

کوچکتر کدام است؟ (نشرالگو)

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{5}$ (۱)

☑ **تست:** در دنباله‌ای هندسی $a_1 a_2 \dots a_5 = 1$ و $a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 5$ ، مقدار $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_5}$ کدام

است؟ (نشرالگو)

۵ (۴)

۲۵ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

۱ (۱)

✓ **تست:** در یک دنباله هندسی، جمله هفتم برابر x است. حاصل ضرب ۱۳ جمله اول این دنباله، همواره برابر کدام گزینه زیر است؟ ($x \neq 0, 1, -1$) (قلمچی)

x^8 (۴)

x^{12} (۳)

x^{13} (۲)

x^{11} (۱)

✓ **تست:** قدرنسبت‌های یک دنباله هندسی و یک دنباله حسابی به ترتیب ۲ و ۳ و جملات اول دو دنباله با هم و جملات سوم آنها نیز باهم برابرند. مجموع سه جمله نخست دنباله هندسی کدام است؟ (گاج)

13 (۴)

15 (۳)

16 (۲)

14 (۱)

☑ **تست:** توپی را از ارتفاع ۸۱ متری رها می‌کنیم، می‌دانیم هر بار که زمین می‌خورد به اندازه $\frac{2}{3}$ ارتفاع قبلی

بالا می‌آید. بار چهارمی که توپ بالا می‌آید، تا چه ارتفاعی می‌رسد؟ (مبتکران)

۲۷(۴)

۲۴(۳)

۸(۲)

۱۶(۱)

☑ **تست:** مدیر یک کارگاه به یک کارگر مبتدی پیشنهاد کرده است دستمزد روز اول ۱۰۰۰ تومان و تا پایان

هفته هر روز ۲۰ درصد به دستمزد روز قبل وی اضافه کند. دستمزد این کارگر در روز پنجم چند تومان است؟

(گاج)

۲۰۱۶/۴(۲)

۱۹۸۶/۳(۱)

۲۱۰۴/۸(۴)

۲۰۷۳/۶(۳)

✓ **تست:** مستطیلی در نظر می‌گیریم که طول و عرض آن به ترتیب ۲ و ۱ سانتی‌متر باشند. در داخل آن مجدداً مستطیلی در نظر می‌گیریم که نسبت طول به عرض آن ۲ باشد و در داخل مستطیل پدید آمده این عمل را مجدداً تکرار می‌کنیم. محیط مستطیل حاصل در مرحله‌ی هفتم، چه کسری از محیط مستطیل اول است؟

(قلم‌چی)



(۱)



(۲)



(۳)

$$\frac{1}{64} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{64} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{32} \quad (۱)$$

$$\frac{3}{32} \quad (۳)$$

نکته: اگر x و y و z سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، y را واسطه‌ی هندسی می‌گویند

$$y^2 = x.z \quad \text{و داریم}$$

مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطه‌ی هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟

۳				۴۸
---	--	--	--	----

(کاردکلاس ص ۲۶ کتاب درسی)

✓ **تست:** اگر سه جمله $x - 2$ و x و $x + 4$ تشکیل یک دنباله هندسی بدهند، جمله نخستین آن کدام است؟ ($x - 2$ جمله اول است) (گاج)

۷(۴)

۴(۳)

۸(۲)

۲(۱)

✓ **تست:** اگر ... A , $2p + 1$, $5p$, $12p - 4$ دنباله هندسی تشکیل دهند، آنگاه A کدام است؟ (قلمچی)

$\frac{5}{2}$ (۴)

۲۰(۳)

۱۰(۲)

$\sqrt{50}$ (۱)

☑ **تست:** بین دو عدد ۴۰×۴۹ و ۲۵۰×۱۲۱ کدام عدد مثبت را قرار دهیم تا سه عدد تشکیل شده، تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند؟ (گاج)

$$۸۷۰۰ (۴)$$

$$۸۴۰۰ (۳)$$

$$۷۸۰۰ (۲)$$

$$۷۷۰۰ (۱)$$

☑ **تست:** اعداد ۲^a و $۴\sqrt{۲}$ و ۲^b سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی‌اند. واسطه‌ی عددی بین a و b کدام است؟ (کنکور)

$$\sqrt{۲} (۴)$$

$$۱/۵ (۳)$$

$$۲ (۲)$$

$$۲/۵ (۱)$$

✓ **تست:** جمله‌ی دوم یک دنباله‌ی حسابی برابر ۱۴ بوده و اگر به جمله‌ی سوم آن عدد ۲۵ اضافه گردد. سه جمله‌ی نخست آن یک دنباله‌ی هندسی افزایشی تشکیل می‌دهند که جمله‌ی سوم این دنباله برابر است با:

۲۵(۱) ۳۶(۲) ۳۹(۳) ۴۹(۴) (گاج)

نکته: اگر دو جمله‌ی a_m و a_n از یک دنباله‌ی هندسی در اختیار باشند آنگاه:

$$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

مثال: جملات سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند، دنباله را مشخص کنید.

(تمرین ص ۲۷ کتاب درسی)

مثال: جاهای خالی را طوری پر کنید که در هر مورد یک دنباله هندسی حاصل شود.

۱۰		۴۰۰۰
۱۰		۸۰۰۰۰
۴		۹۷۲

(کاردکلاس ص ۲۶ کتاب درسی)

تست: جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی $a_n = \frac{2}{3 \times 2^n}$ است. قدرنسبت این دنباله چقدر است؟ (گاج)

$$\frac{2}{3} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{6} \quad (۱)$$

☑ **تست:** جمله ی عمومی یک دنباله ی هندسی به صورت $t_n = \frac{2^{2-n}}{3}$ است. مجموع جمله ی اول و قدرنسبت

این دنباله، کدام است؟ (قلم چلی)

$$\frac{1}{6} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۳)}$$

$$\frac{7}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{7}{6} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** در یک دنباله ی هندسی، جمله های سوم و ششم به ترتیب ۱۲ و ۹۶- هستند. جمله ی هشتم کدام

است؟ (قلم چلی)

$$-۱۸ \text{ (۴)}$$

$$۱۲۸ \text{ (۳)}$$

$$-۳۸۴ \text{ (۲)}$$

$$۳۸۴ \text{ (۱)}$$

تست: اگر $a - 2b - a$ و $a - 6$ و $a - 2$ و $a + 6$ جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه $a + b$ کدام است؟ (قلم‌چی)

۲۲ (۴)

۱۶ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

تست: اگر $t_1 = 4$ و برای هر $n \geq 1$ داشته باشیم $t_{n+1} = 3t_n$. جمله‌ی عمومی دنباله کدام است؟ (نشرالگو)

$3n + 1$ (۴)

$8n - 4$ (۳)

$4 \times 3^{n-1}$ (۲)

4×3^n (۱)

☑ **تست:** جمله ی دوم یک دنباله ی هندسی برابر ۱۰ است. از جمله ی سوم آن، چه عددی کم شود تا سه جمله ی نخست آن، یک دنباله ی حسابی افزایشی با قدرنسبت ۶ تشکیل دهند؟ (گاج)

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۴ (۱)

📚 **نکته:** اگر بین اندیس های چهار جمله از یک دنباله ی هندسی، رابطه ی $p + q = m + n$ برقرار باشد،

$$a_p \times a_q = a_n \times a_m$$

آنگاه داریم:

و اگر در یک دنباله ی هندسی بین اندیس های سه جمله رابطه ی $m + p = 2n$ برقرار باشد، آنگاه داریم:

$$a_n^2 = a_m \times a_p$$

در این قانون تعداد اندیس ها در دو طرف تساوی باید برابر باشد، مثلاً $5 + 7 = 12$ ولی $a_5 \times a_7 \neq a_{12}$ زیرا سمت چپ شامل دو اندیس ۵ و ۷ می باشد ولی سمت راست فقط شامل یک اندیس ۱۲ است.

☑ **تست:** در یک دنباله ی هندسی $a_4 a_4 = 2a_5$ ، جمله ی اول کدام است؟ ($a_m \neq 0$) (گاج)

۲√۲ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

√۲ (۱)

☑ **تست:** در یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات دوم و نهم برابر $\frac{27}{512}$ است. اگر جمله سوم دنباله

برابر $\frac{1}{12}$ باشد، جمله هشتم دنباله کدام است؟ (گاج)

$$\frac{27}{128} \quad (4)$$

$$\frac{81}{128} \quad (3)$$

$$\frac{27}{64} \quad (2)$$

$$\frac{8}{64} \quad (1)$$

☑ **تست:** در یک دنباله هندسی $a_7 \cdot a_3 \cdot a_4 = 8$ می باشد، حاصل $a_1 \cdot a_5$ کدام است؟ (قلم چی)

$$16 \quad (4)$$

$$\pi \quad (3)$$

$$8 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

نکته: اگر a_n و a_m و a_L سه جمله از یک دنباله‌ی حسابی و نیز به ترتیب جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q باشند، داریم:

$$q = \frac{n - m}{m - L}$$

☑ **تست:** اگر جملات چهارم، ششم و دوازدهم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{4}{3} \quad (1) \qquad \frac{3}{2} \quad (2) \qquad 2 \quad (3) \qquad 3 \quad (4)$$

☑ **تست:** جملات دوم، پنجم و دوازدهم از یک دنباله‌ی حسابی می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{5}{3} \quad (1) \qquad \frac{7}{4} \quad (2) \qquad \frac{7}{3} \quad (3) \qquad \frac{9}{4} \quad (4)$$

فصل دوم

مثلثات

□ فصل دوم: مثلثات

◀ مثلثات:

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی روابط بین زوایا و اضلاع یک مثلث می‌پردازد. یکی از اهداف این علم، اندازه‌گیری فاصله‌ها به صورت غیر مستقیم است. مثلثات در علوم مهندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و غیره کاربرد دارد.

به عنوان مثال فرض کنید یک هواپیما در ارتفاع ۲ کیلومتری از سطح زمین در حال فرود آمدن است.



اگر زاویه‌ی هواپیما با افق 13° باشد، می‌خواهیم محل دقیق فرود هواپیما را بدانیم. این مسئله و مسائلی نظیر این با استفاده از روابط مثلثاتی حل می‌شوند.

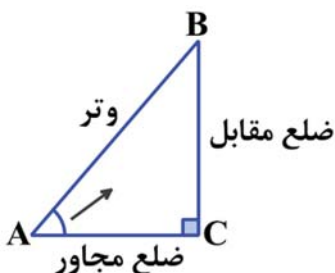
◀ نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه :

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه}}{\text{طول وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}}{\text{طول وتر}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cot \hat{A} = \frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویه}} = \frac{AC}{BC}$$



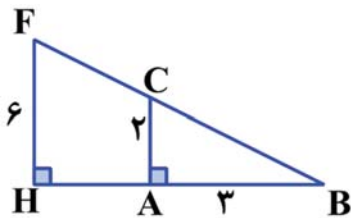
مثال: یک هواپیما در ارتفاع ۲km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه‌ی هواپیما با افق

حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی A فرود می‌آید. ($\tan 13^\circ \approx 0.23$)

(تمرین ص ۳۵ کتاب درسی)



تست: در شکل زیر، اندازه‌ی AH چند واحد است؟ (کاج)



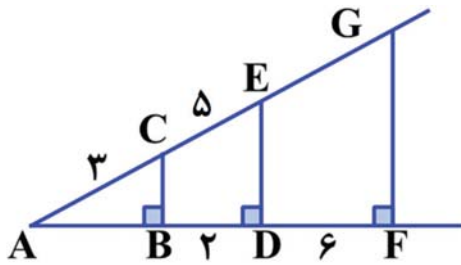
۵ (۲)

۴ (۱)

۷ (۴)

۶ (۳)

تست: با توجه به شکل مقابل، $\sin \hat{G}$ کدام است؟ (گاج)



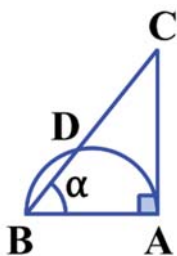
$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

$\frac{2}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

تست: در شکل زیر، $DC = 8x$ و $BD = x$ ، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟ (نشرالگو)



$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

نکته:

θ \ نسبت	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cot \theta$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

θ \ نسبت	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos \theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan \theta$	۰	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot \theta$	ت.ن	۰	ت.ن	۰	ت.ن

تست: حاصل عبارت $\frac{1 + 3 \tan^2 30^\circ}{4 \cos^2 30^\circ + 2 \cos^2 45^\circ}$ کدام است؟ (نشرالگو)

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست: حاصل عبارت $\frac{\tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} \times \frac{1 - \cot^2 60^\circ}{\cot^2 60^\circ + 1}$ کدام است؟ (گاج)

$$\frac{\sqrt{3}}{16} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (1)$$

تست: مقدار $A = (\sin 1^\circ - \cos 1^\circ)(\sin 2^\circ - \cos 2^\circ) \dots (\sin 89^\circ - \cos 89^\circ)$ کدام است؟ (نشرالگو)

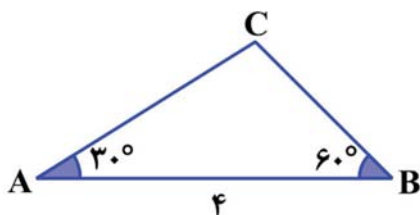
صفر (4)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{45} \quad (3)$$

-1 (2)

1 (1)

تست: در شکل زیر، محیط مثلث ABC کدام است؟ (گاج)



$$6 + 2\sqrt{3} \quad (2)$$

$$2 + 6\sqrt{3} \quad (1)$$

$$4 + 2\sqrt{3} \quad (4)$$

$$2 + 3\sqrt{6} \quad (3)$$

تست: مثلثی به اضلاع ۳ و ۶ و x رسم کرده‌ایم ($x < 6$) اگر این مثلث قائم‌الزاویه باشد. مکمل کوچکترین

زاویه‌ی آن چند درجه است؟ (مبتکران)

$$150 \quad (4)$$

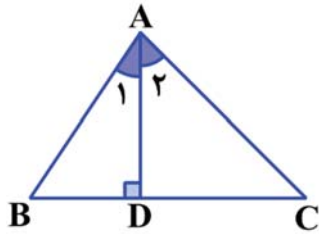
$$120 \quad (3)$$

$$60 \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

☑ **تست:** در شکل زیر، $\frac{AB}{AD} = \sqrt{2}$ و $\frac{AC}{AD} = 2$ و $\frac{CD}{AD} = \sqrt{3}$ می باشد. زاویه ی \hat{BAC} چند برابر زاویه ی

\hat{ACD} است؟ (کنکور)



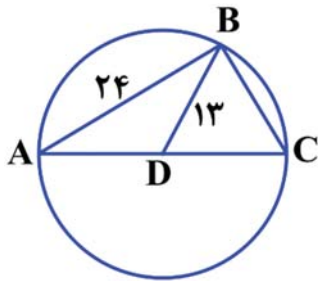
$\frac{7}{2}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

☑ **تست:** در نیم دایره ی روبه رو، D مرکز دایره است. $\tan \hat{A}$ کدام است؟ (مبتکران)



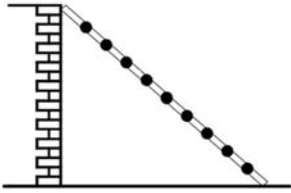
$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{5}{14}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

☑ **تست:** نردبانی به طول ۳ متر را به دیواری تکیه داده‌ایم. اگر زاویه نردبان با سطح زمین 30° باشد، ارتفاع



دیوار چقدر است؟ (گاج)

۱/۵ (۲)

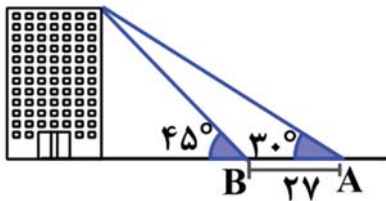
۶ (۱)

۵ (۴)

۴/۵ (۳)

☑ **تست:** یک برج از نقطه‌های A و B که در فاصله‌ی ۲۷ متری از یکدیگر و در یک طرف برج قرار دارند، با

زاویه‌های 30° و 45° دیده می‌شود. ارتفاع برج کدام است؟ ($\sqrt{3} \approx 1/7$) (نشر الگو)



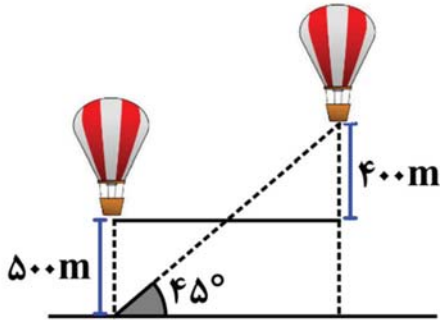
۳۴/۶۵ (۱)

۳۶/۴۵ (۲)

۲۳/۷۵ (۳)

۲۵/۷۳ (۴)

☑ **تست:** یک بالن مستقیم بالای سر یک مشاهده کننده در ارتفاع ۵۰۰ متری قرار دارد. بعد از ۱۵ دقیقه ارتفاع بالن ۴۰۰ متر افزایش یافته و زاویهی آن با مشاهده کننده 45° می شود. سرعت افقی این بالن (در امتداد زمین) چند متر بر ثانیه است؟ (قلم چی)



۲(۱)

۳(۲)

۱(۳)

۵(۴)

📖 **مثال:** یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهی 30° پرتاب می شود. می خواهیم بدانیم پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می رسد؟ (مثال ص ۳۳ کتاب درسی)

مثال: یک بالن توسط دو طناب به زمین بسته شده است. طول یکی از طناب‌ها ۳۰ متر است.



می‌خواهیم طول طناب دوم را پیدا کنیم. (کاردرکلاس ص ۳۴ کتاب درسی)

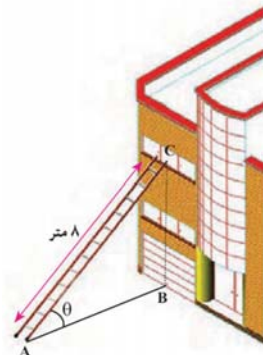
الف) ابتدا اندازه‌ی زاویه‌ی B را به دست آورید. سپس ارتفاع وارد بر ضلع AC را رسم کنید و آن را BH بنامید.

ب) طول BH را با استفاده از سینوس زاویه‌ی A به دست آورید.

پ) اکنون با استفاده از سینوس زاویه‌ی 65° ، طول طناب دوم را پیدا کنید.

$$(\sin 65^\circ \approx 0.9)$$

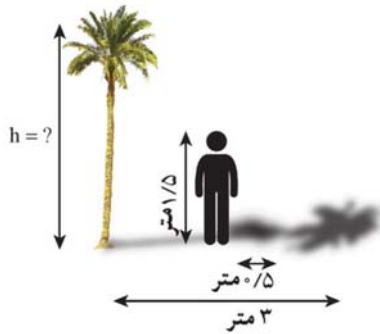
مثال: مطابق شکل مقابل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره‌ی ساختمانی



قرار گرفته است. اگر زاویه‌ی نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره را

محاسبه کنید. فاصله‌ی پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

(کاردرکلاس ص ۳۴ کتاب درسی)



مثال: علی می‌خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه‌ی آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی $1/5$ متر و طول سایه‌ی او در همان لحظه $0/5$ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟ (تمرین ص ۳۴ کتاب درسی)

نکته: اگر $A + B = 90^\circ$ (دو زاویه‌ی متمم) باشد، آنگاه:

$$1) \sin \hat{A} = \cos \hat{B}$$

$$2) \cos \hat{A} = \sin \hat{B}$$

$$3) \tan \hat{A} = \cot \hat{B}$$

$$4) \cot \hat{A} = \tan \hat{B}$$

تست: مقدار x از رابطه‌ی $1 = \frac{\cos 47^\circ}{\sin x}$ کدام است؟ (مبتکران)

$$45^\circ (4)$$

$$43^\circ (3)$$

$$47^\circ (2)$$

$$59^\circ (1)$$

☑ **تست:** در مثلث قائم الزاویه ABC ، اگر $\hat{A} = 90^\circ$ ، حاصل $\frac{\tan \hat{B} + \tan \hat{C}}{\cot \hat{B} + \cot \hat{C}}$ کدام است؟ (نشرالگو)

cot A (۴)

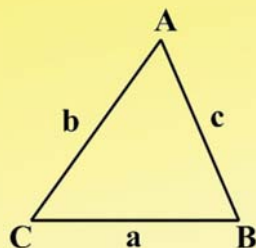
tan A (۳)

cos A (۲)

sin A (۱)

☑ **تست:** در مثلث ABC رابطه‌ی $\tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(\hat{C} + 30^\circ) = 1$ آنگاه: (کنکور)

 $\hat{A} = 30^\circ$ (۴) $\hat{A} = 60^\circ$ (۳) $\hat{A} = 120^\circ$ (۲) $\hat{A} = 150^\circ$ (۱)



نکته: در مثلث مقابل همواره داریم:

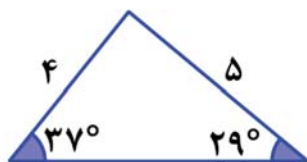
$$۱) a = b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}$$

$$۲) b = c \cos \hat{A} + a \cos \hat{C}$$

$$۳) c = a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A}$$

تست: زمینی مثلث شکل به صورت زیر برای ساخت یک مجتمع تجاری در نظر گرفته شده است. محیط

این زمین تقریباً کدام است؟ ($\cos ۳۷^\circ \approx ۰/۸$, $\cos ۲۹^\circ \approx ۰/۸۵$) (کاج)



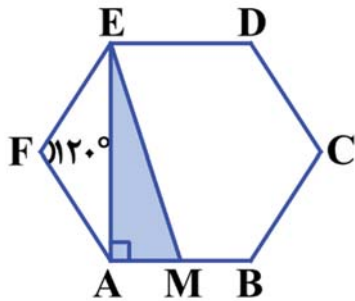
۷/۴۵ (۱)

۱۵/۲۵ (۲)

۱۶/۴۵ (۳)

۱۷/۲۵ (۴)

تست: در شکل مقابل، اندازه‌ی اضلاع شش ضلعی منتظم برابر ۲۰ سانتی‌متر و M وسط AB است.



اندازه‌ی مساحت مثلث AME کدام است؟ (گاج)

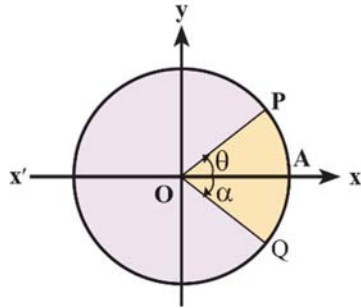
(۱) $400\sqrt{3}$

(۲) $200\sqrt{3}$

(۳) $300\sqrt{3}$

(۴) $100\sqrt{3}$

دایره‌ی مثلثاتی :



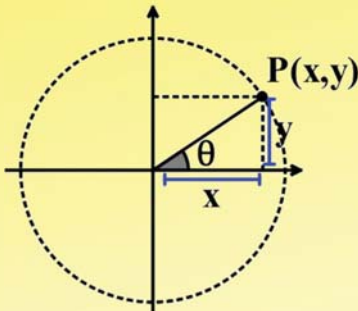
دایره‌ی روبرو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را در نظر بگیرید. اگر با حرکت

در خلاف جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند P برسیم، زاویه‌ی \widehat{AOP}

مثبت است و اگر با حرکت در جهت عقربه‌های ساعت به نقطه‌ای مانند Q

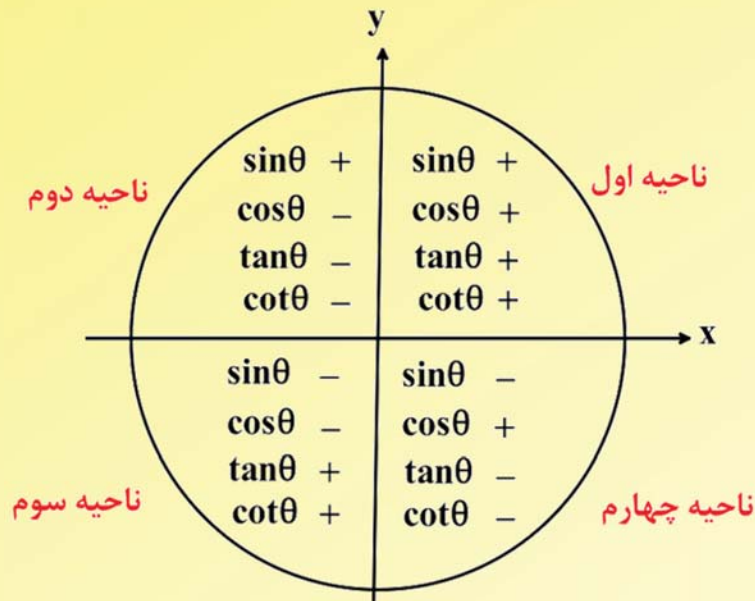
برسیم، زاویه‌ی \widehat{AOQ} منفی است. چنین دایره‌ای را یک دایره‌ی مثلثاتی می‌نامیم.

نکته: با توجه به دایره مثلثاتی داریم:




$$P(x, y) = P(\cos \theta, \sin \theta) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

نکته: علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی دایره‌ی مثلثاتی به قرار زیر است:




مثال: اگر $\sin \theta$ و $\tan \theta$ هم علامت باشند، آنگاه θ در کدام ربع مثلثاتی قرار دارد؟ 

(تمرین ص ۴۱ کتاب درسی)

مثال: حدود زاویه θ را در هر یک از حالات زیر مشخص کنید. (تمرین ص ۴۱ کتاب درسی) 

(ب) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

(الف) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

مثال: اگر $\sin \alpha \times \cos \alpha < 0$ ، آنگاه α در کدام یک از نواحی چهارگانه می تواند قرار بگیرد؟ 

(تمرین ص ۴۱ کتاب درسی)

☑ **تست:** کدام یک عددی منفی است؟ (نشرالگو)

$\cot 170^\circ$ (۴)

$\cos 350^\circ$ (۳)

$\tan 190^\circ$ (۲)

$\sin 160^\circ$ (۱)

☑ **تست:** کدام یک عدد بزرگتری است؟ (نشرالگو)

$\sin 190^\circ$ (۴)

$\sin 140^\circ$ (۳)

$\sin 110^\circ$ (۲)

$\sin 20^\circ$ (۱)

☑ **تست:** حاصل $\frac{|\sin x - \cos x|}{2} + \frac{\sin x + \cos x}{2}$ که در آن $x \in (0^\circ, 45^\circ)$ کدام است؟ (گاج)

$\cos x - \sin x$ (۴)

$\sin x + \cos x$ (۳)

$\cos x$ (۲)

$\sin x$ (۱)

☑ **تست:** اگر زاویه θ بر روی دایره ی مثلثاتی نقطه ی $P(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ را به وجود آورد، آنگاه $\sin \theta \cdot \cos \theta$

کدام است؟ (قلمچی)

$\frac{1}{3}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۲)

$-\frac{2\sqrt{2}}{9}$ (۱)

☑ **تست:** نقطه‌ی $P\left(\frac{2}{\sqrt{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ بر روی دایره‌ی مثلثاتی زاویه‌ی θ می‌سازد. $\tan \theta$ کدام است؟ (قلم‌چی)

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

☑ **تست:** اگر $P(-\sqrt{3}, 1)$ یک نقطه از صفحه‌ی مختصات و O مبدأ مختصات باشد، زاویه‌ی OP با جهت مثبت محور x ها کدام است؟ (گاج)

$$150^\circ \quad (4)$$

$$135^\circ \quad (3)$$

$$120^\circ \quad (2)$$

$$60^\circ \quad (1)$$

نکته: برای $\sin \theta$ و $\cos \theta$ همواره داریم:

$$۱) -1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$۲) -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

با توجه به محدودهی $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ می توان گفت:

$$۱) 0 \leq \sin^2 \alpha \leq 1$$

$$۲) 0 \leq \cos^2 \alpha \leq 1$$

تست: اگر $\cos \alpha = 4m + 2$ باشد، حدود تغییرات m کدام است؟ (کاج)

$$- \frac{3}{4} \leq m \leq - \frac{1}{4} \quad (۴)$$

$$- \frac{1}{4} < m < 0 \quad (۳)$$

$$\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad (۱)$$

تست: اگر $180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$ و $\cos \alpha = \frac{m-1}{2}$ ، حدود m کدام است؟ (نشرالگو)

$$-2 \leq m \leq 2 \quad (۴)$$

$$-1 \leq m \leq 1 \quad (۳)$$

$$-1 \leq m \leq 0 \quad (۲)$$

$$0 \leq m \leq 1 \quad (۱)$$

تست: اگر $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ و $\cos \alpha = 3m + 1$ ، حدود m کدام است؟ (نشرالگو)

$$-\frac{1}{6} < m \leq 0 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{6} < m < \frac{1}{6} \quad (3)$$

$$0 \leq m < \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{6} < m < 0 \quad (1)$$

تست: اگر $30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$ و $\cos \alpha = 2 - 3m$ ، حدود m کدام است؟ (نشرالگو)

$$\frac{4 - \sqrt{3}}{6} \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \leq m \leq 1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \quad (1)$$

☑ **تست:** اگر $30^\circ < x < 120^\circ$ آنگاه حدود تغییرات $\sin x$ کدام است؟ (مبتکران)

$$\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} < \sin x \leq 1 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \quad (4)$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \quad (3)$$

☑ **تست:** مجموع بیشترین و کمترین مقدار عبارت $\frac{3 + \sin \alpha}{2 + \sin \alpha}$ کدام است؟ (نشرالگو)

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

$$\frac{10}{3} \quad (3)$$

$$\frac{6}{5} \quad (2)$$

$$\frac{5}{3} \quad (1)$$

☑ **تست:** اگر $\sin \alpha + \sin \beta = 2$ باشد، حاصل $\sin^6 \alpha + \cos^3 \beta$ چند است؟ (مبتکران)

$-\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{4\sqrt{2}}{5}$ (۱)

◀ اتحادهای مثلثاتی:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

۲) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

۳) $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

۴) $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

۵) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

۶) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

نکته: 

$$1 - 2 \sin x \cdot \cos x = (\sin x - \cos x)^2$$

$$1 + 2 \sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

◀ نسبت‌های مثلثاتی زاویه $-\alpha$:

۱) $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$

۲) $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

۳) $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$

۴) $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



مثال: در هر یک از موارد زیر، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای داده شده است. سایر نسبت‌های مثلثاتی را بدست

آورید. (تمرین ص ۴۱ کتاب درسی)

(الف) $\cos \alpha = \frac{3}{7}$ (در ربع چهارم)

(ب) $\sin \beta = \frac{-1}{2}$ (در ربع سوم)




مثال: اگر $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ و $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ ، آنگاه سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را بدست آورید.


(کاردرکلاس ص ۴۴ کتاب درسی)

مثال: فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه‌ی دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی

زاویه α را به دست آورید. (تمرین ص ۴۵ کتاب درسی)

مثال: اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه‌ی چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه‌ی α را به دست آورید. 

(تمرین ص ۴۵ کتاب درسی)

مثال: اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید. 

(تمرین ص ۴۵ کتاب درسی)



مثال: با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

(تمرین ص ۴۵ کتاب درسی) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$ (ب)

$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$ (ت)

$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ (الف)

$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$ (پ)

$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ (ث)



☑ **تست:** با فرض اینکه $\tan 76^\circ = 4$ باشد، مقدار عددی $\sin^2 14^\circ$ چقدر است؟ (گاج)

$$\frac{1}{17} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{16} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{15} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{14} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** حاصل عبارت زیر کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} - \cot^4 \theta$$

$$\cot^2 \theta \text{ (۴)}$$

$$\tan^2 \theta \text{ (۳)}$$

$$\cos^2 \theta \text{ (۲)}$$

$$\sin^2 \theta \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** ساده شده‌ی عبارت $(1 - \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta)$ کدام است؟ (کنکور)

$$2 \tan^2 \theta \quad (2)$$

$$2 \cot^2 \theta \quad (1)$$

$$1 - 2 \sin^2 \theta \quad (4)$$

$$1 - 2 \cos^2 \theta \quad (3)$$

☑ **تست:** ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{1 - \cos^2 x \cdot \tan^2 x}{\cos^2 x}$ کدام است؟ (قلم‌چی)

$$\frac{1}{\tan^2 x} \quad (4)$$

$$\tan^2 x \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

✓ تست: عبارت $1 + \cot^4 \theta + 2 \cot^2 \theta$ برابر کدام است؟ (گاج)

$$\frac{1}{\cos^4 \theta} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sin^4 \theta} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (1)$$

✓ تست: حاصل $(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \tan \theta \cdot \cos^2 \theta$ برابر کدام است؟ (کنکور)

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$1 + \cot \theta \quad (3)$$

$$\tan \theta \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

☑ **تست:** اگر $\tan \theta = 0/2$ باشد، مقدار $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta}$ کدام است؟ (کنکور)

-۲ (۴)

۲ (۳)

۱/۲ (۲)

۳ (۱)

☑ **تست:** در صورتی که $\frac{\sin \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{3}{2}$ مقدار $\tan \theta$ برابر است با: (کنکور)

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

☑ **تست:** اگر $\frac{3}{\sin \alpha} + \frac{4}{\cos \alpha} = 0$ مقدار $\frac{3}{\tan \alpha} + \frac{4}{\cot \alpha}$ کدام است؟ (نشرالگو)

- (۱) -۱۲ (۲) -۱ (۳) -۷ (۴) صفر

☑ **تست:** اگر $\sin x > 0$ و $\cos x < 0$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \times \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ کدام است؟ (گاج)

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\tan x$ (۴) $-\tan x$

❑ **تست:** اگر $180^\circ < \alpha < 135^\circ$ ، حاصل عبارت زیر کدام است؟ (نشرالگو)

$$A = \sqrt{1 - 2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha}}$$

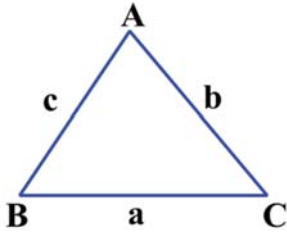
$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (۲)$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \quad (۱)$$

$$-\sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (۴)$$

$$-\sin \alpha - \cos \alpha \quad (۳)$$

مساحت مثلث:

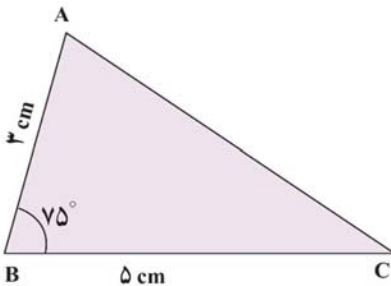


$$S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \hat{C} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$$

نکته: مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است.

نکته: مساحت یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ است.

مثال: فرض کنید $\sin 75^\circ \approx 0.96$. مساحت مثلث ABC در شکل زیر را به دست آورید.



(تمرین ص ۳۵ کتاب درسی)

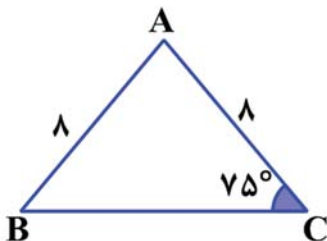
تست: در شکل روبه‌رو $AB = AC = 8$ است. مساحت مثلث کدام است؟ (مبتکران)

۴) نمی توان بدست آورد

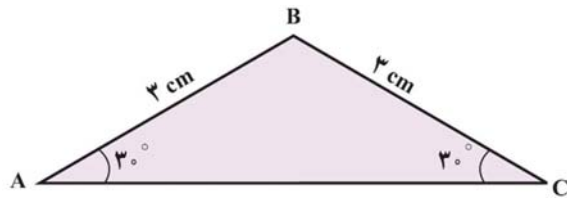
۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)



مثال: مساحت مثلث ABC را پیدا کنید. (تمرین ص ۳۵ کتاب درسی)



☑ **تست:** در یک مثلث با زاویه‌های تند، طول دو ضلع ۶ و ۲۲ است. اگر مساحت مثلث $33\sqrt{2}$ باشد، زاویه بین دو ضلع چند درجه است؟ (مبتکران)

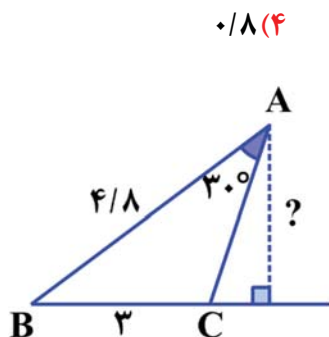
۶۰° (۴)

۳۰° (۳)

۴۵° (۲)

۱۵° (۱)

تست: در شکل زیر، فاصله‌ی نقطه‌ی A از امتداد ضلع BC، چند برابر طول AC است؟ (قلم‌چی)



۰/۸ (۴)

۰/۷ (۳)

۰/۶ (۲)

۰/۵ (۱)

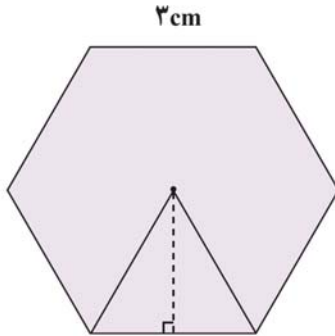
تست: مساحت متوازی‌الاضلاعی با اضلاع ۴ و ۱۰ و یک زاویه‌ی 120° چقدر است؟ (نشرالگو)

$20\sqrt{3}$ (۴)

$10\sqrt{3}$ (۳)

۲۰ (۲)

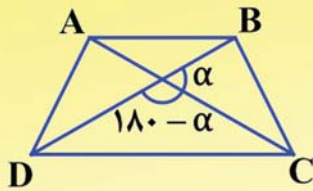
۱۰ (۱)



مثال: مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

(تمرین ص ۳۵ کتاب درسی)

نکته: مساحت یک چهارضلعی برابر است با نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بین آنها:



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \times BD \times \sin(180 - \alpha)$$

تست: در یک چهارضلعی، طول دو قطر ۹ و ۱۲ است. اگر مساحت آن ۲۷ باشد، زاویه‌ی تند بین دو قطر

چند درجه است؟ (مبتکران)

۹۰° (۴)

۶۰° (۳)

۴۵° (۲)

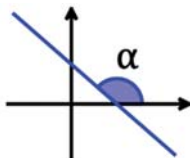
۳۰° (۱)

رابطه‌ی شیب خط و تانژانت زاویه :

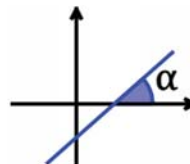
شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند برابر با تانژانت زاویه‌ی بین خط و جهت مثبت محور افقی است.

$$m = \tan \alpha$$

شیب خط



α منفرد و شیب خط منفی



α حاده و شیب خط مثبت

تست: شیب خط نشان داده شده در شکل مقابل کدام است؟ (کاج)



$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

۱ (۱)

$$2 \quad (4)$$

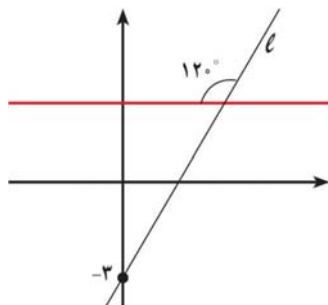
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها 45° است و نقطه‌ی $(0, 2)$ روی

آن قرار دارد. (تمرین ص ۴۱ کتاب درسی)

مثال: معادله‌ی خطی را بنویسید که زاویه‌ی آن با جهت مثبت محور x ها 30° است و از نقطه‌ی $(1, 0)$ می‌گذرد. (کاردر کلاس ص ۴۰ کتاب درسی)

مثال: با توجه به شکل زیر، معادله‌ی خط l را به دست آورید. (تمرین ص ۴۱ کتاب درسی)



تست: اگر خط D از دو نقطه‌ی $A(1, 2)$ و $B(0, 1)$ عبور کند. این خط محور x ها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

(قلم‌چی)

 45° (۲) 30° (۱) 90° (۴) 60° (۳)

تست: نقاط $A(5, 1+a)$ و $B(a+1, -3)$ مفروض‌اند، مقدار a کدام باشد، تا خط گذرنده از این دو نقطه با

جهت مثبت محور x ها زاویه‌ی 45° بسازد؟ (مبتکران)

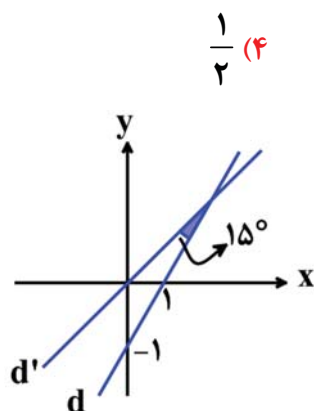
۱ (۴)

-۲ (۳)

صفر (۲)

-۴ (۱)

☑ **تست:** با توجه به شکل زیر، شیب خط d' کدام است؟ (قلم‌چی)



$\frac{1}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

☑ **تست:** زاویه‌ای که خط $\sqrt{3}x - 3y = 5$ با جهت مثبت محور x می‌سازد، چند درجه است؟ (قلم‌چی)

75° (۴)

60° (۳)

45° (۲)

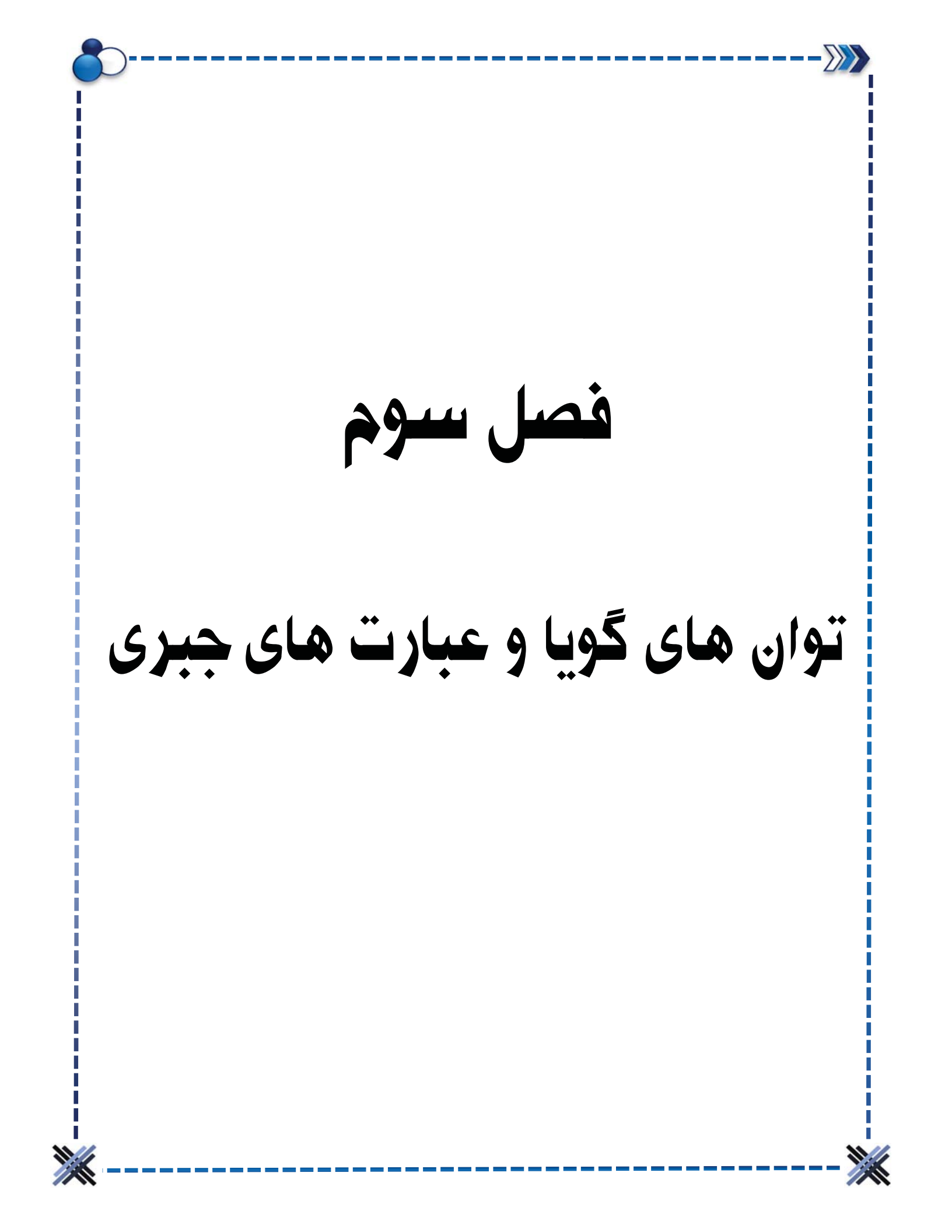
30° (۱)

☑ **تست:** اگر خط $(a + 5)y - 2\sqrt{3}ax + 1 = 0$ با جهت مثبت محور x زاویه 60° بسازد، a کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $5\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) ۲ (گاج)

☑ **تست:** در شکل مقابل اگر $\tan 117^\circ \approx -2$ باشد. مقدار a کدام است؟ (گاج)





فصل سوم

توان های گویا و عبارت های جبری

□ فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

□ درس اول: اتحادهای جبری

◀ اتحادهای جبری:

۱) مربع دو جمله‌ای : $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$


۲) مربع سه جمله‌ای : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

۳) مزدوج : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

۴) یک جمله مشترک : $(u + a)(u + b) = u^2 + (a + b)u + ab$

۵) مکعب دو جمله : $(a \pm b)^3 = \begin{cases} a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \\ a^3 \pm b^3 \pm 3a \cdot b(a \pm b) \end{cases}$

۶) مکعبات دو جمله : $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید. 

۱) $(2x - 5y)^2$

۲) $(2x - 3y + 5z)^2$

۳) $(-3x + y - 7z)^2$

$$۴) (2x - 3y)(2x + 3y)$$

$$۵) (2x - y)(2x + y)(4x^2 + y^2)$$

$$۶) (x^2 + 1)(1 - x^2)$$

$$۷) (x + 2)(x - 5)$$

$$۸) (5x - 6)(5x + 2)$$


$$۹) (2a + b)(fa^2 - 2ab + b^2)$$



$$۱۰) (۳a^۲ + ۲b^۳)(۹a^۴ - ۶a^۲b^۳ + ۴b^۶)$$

$$۱۱) (۲a + ۳b)^۳$$


$$۱۲) (a^۲ - ۳b)^۳$$

 **مثال:** اگر $x + y = \frac{۷}{۳}$ و $x \cdot y = -۲$ و $x > y$ ، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$۱) x^۲ + y^۲$$

۲) $x - y$

۳) $x^3 + y^3$


مثال: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحادها بدست آورید. 

۱) $235^2 - 230^2 - 5^2$


۲) $850^2 - 750^2$

۳) 497×503


۴) 105^2

مثال: اگر $a = \sqrt{2}$ و $b = \sqrt{2} - 1$ باشد، مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید. 

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + b^8$$

مثال: اگر $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-4} = 3$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-4}$ را بدست آورید. 

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

مثال: اگر $x^2 + x + 1 = 0$ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید. 

$$x^3 + \frac{1}{x^3}$$

مثال: حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف)
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{x-1}$$

(فعالیت ص ۶۵ کتاب درسی)

ب)
$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1}$$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

✓ تست: ساده شده‌ی عبارت $A = (2a - 3)(2a + 3)(16a^4 + 36a^2 + 81)$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $64a^6 - 729$ (۲) $8a^6 - 729$ (۳) $64a^6 - 243$ (۴) $8a^6 - 243$ (قلم چی)

✓ تست: اگر $x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$ باشد، حاصل $x^3 - 5x$ کدام است؟ (قلم چی)

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) 2

✓ تست: اگر $x + y = 3k$ و $xy = k^2$ باشد، $x^3 + y^3$ همواره کدام است؟ (قلم چی)

$9k^3$ (۴)

$18k^2 + 9k$ (۳)

$27k^3$ (۲)

$18k^3$ (۱)

✓ تست: عدد $33^3 - 100^3 - 133^3$ چند برابر 133 است؟ (قلم چی)

990 (۴)

900 (۳)

9900 (۲)

9000 (۱)

✓ تست: اگر $x + \frac{1}{x} = 3$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ کدام است؟ (قلم چی)

۵۴ (۴)

۹ (۳)

۲۷ (۲)

۱۸ (۱)

✓ تست: اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{5}$ باشد، حاصل $a^3 - \frac{1}{a^3}$ کدام است؟ (گاج)

۵√۵ (۴)

۹√۵ (۳)

۸√۵ (۲)

۶√۵ (۱)

✓ تست: اگر $\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\frac{x^2-1}{x}$ کدام است؟ (قلم چی)

۱۲ (۴)

۱۴ (۳)

۲ (۲)

۶ (۱)

✓ تست: حاصل عبارت $(x + \sqrt{2})^3 - (x - \sqrt{2})^3$ کدام است؟ (گاج)

 $6\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{2}$ (۴)

 $6\sqrt{2}x^2 + 4$ (۳)

 $12x^2 + 2\sqrt{2}$ (۲)

 $12x^2 + 4$ (۱)

✓ تست: حاصل عبارت $A = (x - \sqrt[3]{2})^2 (x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})^2$ به ازای $x = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$ کدام است؟ (قلم چی)

۲ (۴)

 $\sqrt{2} + 4$ (۳)

۴ (۲)

 $\sqrt{2} + 2$ (۱)

✓ تست: حاصل عبارت $(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)(x^{12}+x^6+1)$ به ازای $x = \sqrt[3]{2}$ کدام است؟ (قلم چی)

۱۵ (۴)

۳۲ (۳)

۱۶ (۲)

۶۳ (۱)

✓ تست: اگر $0 < a < 1$ و $a + \frac{1}{a} = \sqrt{20}$ باشد، حاصل $a^2 - \frac{1}{a^2}$ کدام است؟ (گاج)

۱۶ (۴)

۸√۵ (۳)

-۸√۵ (۲)

۴√۵ (۱)

✓ تست: حاصل عبارت $x^3 - 3x^2 + 3x - 3\sqrt{3}$ به ازای $x = \sqrt{3} + 1$ کدام است؟ (قلم چی)

۳√۲ - ۱ (۴)

۱ (۳)

۱ + √۳ (۲)

۱ + ۳√۳ (۱)

✓ تست: حاصل عبارت $x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 9x - 3\sqrt{3}$ به ازای $x = 2 + \sqrt{3}$ کدام است؟ (قلم چی)

۱۱(۴)

۸ + ۳√۳ (۳)

۸ + √۳ (۲)

۸(۱)

✓ تست: ضریب x^3 در حاصل عبارت $(2x^2 + x^{-1})^3$ کدام است؟ (گاج)

۱۲(۴)

۶(۳)

۸(۲)

صفر(۱)

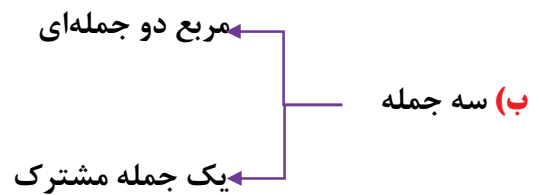
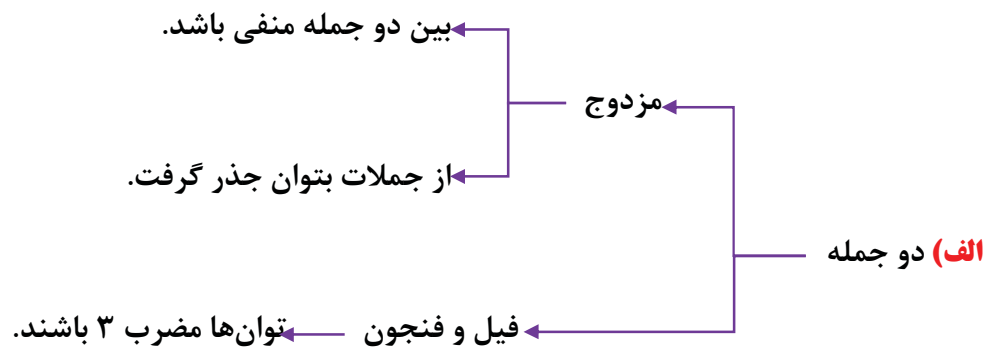
□ فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

□ درس دوم: تجزیه

◀ تجزیه:

① آیا می توان از عبارتی فاکتور گرفت یا خیر؟


② تعداد جمله ها:



ج) بیشتر از سه جمله : دسته بندی و ...

③ آیا داخل پرانتزها را مجدد می توان تجزیه کرد یا خیر؟

④ آیا بین عبارت ها، ضرب وجود دارد یا خیر؟

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید. 

۱) $5a^2b^3 + 10a^3b^2$

$$۲) ۴a^2(a+b) + ۸a(a+b)$$

$$۳) x^2 - ۴$$

$$۴) x^f - y^f$$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

$$۵) (۲a+b)^2 - ۲۵$$

$$۶) (۴x+۳)^2 - (۳x-۱)^2$$

$$۷) ۶۴a^3 - ۱$$

۸) $8a^3 + 27$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

۹) $a^3b^6 - 8$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

۱۰) $x^6 - y^6$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

۱۱) $25a^2 - 30a + 9$

۱۲) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

۱۳) $4x^2 - 20x + 25$

$$۱۴) ۲۵x^2 - ۵x - ۴۲$$

$$۱۵) ۳x^2 - ۱۳x - ۱۰$$

$$۱۶) ۵x^2 - ۱۴x - ۳$$

$$۱۷) ۲x^2 + ۳x + ۱$$

(مثال ص ۶۳ کتاب درسی)

$$۱۸) ac + bc + ad + bd$$

$$۱۹) x^3 + x^2 - x - 1$$

$$۲۰) 2x^3 - x^2 - 8x + 4$$

$$۲۱) x^4 - 3x^3 + 8x - 24$$

$$۲۲) a^3 - 2ab + a^2b - 2b^2$$

(مثال ص ۶۳ کتاب درسی)

$$۲۳) x^2 - y^2 + 2x + 1$$

$$۲۴) x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$۲۵) x^6 + x^2 + 2$$

مثال: صورت و مخرج هر کسر را تجزیه و عبارت را ساده کنید. (فعالیت ص ۶۵ کتاب درسی)

الف)
$$\frac{x^6 + 1}{x^6 + 2x^2 + 1}$$

ب)
$$\frac{x^3 - 1}{(x - 1)^3}$$

پ) $\frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$

ت) $\frac{y^5 - y^3 - 12y}{8y^2 + 16y}$

مثال: حاصل کسرهای زیر را به دست آورید و ساده کنید.

الف) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$

(فعالیت ص ۶۵ کتاب درسی)

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

ب) $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} - \frac{1}{x-1}$

☑ **تست:** در تجزیه‌ی عبارت $x^3 - 2xy + x^2y - 2y^2$ کدام عامل وجود دارد؟ (گزینه ۲)

$2x - y^2$ (۴)

$x^2 - 2y$ (۳)

$x - y$ (۲)

$x^2 + 2y$ (۱)

☑ **تست:** در تجزیه‌ی عبارت $y^5 + 2y^3 - 24y$ کدام عامل وجود ندارد؟ (قلم چی)

$y - 4$ (۴)

$y + 2$ (۳)

$y - 2$ (۲)

$y^2 + 6$ (۱)

☑ **تست:** در تجزیه‌ی عبارت $8a^9 - a^6b^3 + 8a^3b^3 - b^6$ کدام عبارت وجود ندارد؟ (قلم چی)

$2a + b$ (۴)

$2a - b$ (۳)

$4a^2 + 2ab + b^2$ (۲)

$a^6 + b^3$ (۱)

☑ **تست:** کدام گزینه یکی از عوامل تجزیه‌ی $x^4 - 64x$ است؟ (کاج)

$x^2 + 8x + 16$ (۴)

$x^2 - 4x + 16$ (۳)

$x^2 + 4x$ (۲)

$x^2 + 4x + 16$ (۱)

☑ **تست:** در تجزیه‌ی عبارت $3a^3b - 12ab^3 + a^3 - 8b^3$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟ (قلم چی)

$3a - 2b$ (۴)

$3a + 2b$ (۳)

$a + 2b$ (۲)

$a - 2b$ (۱)

☑ تست: در تجزیه‌ی عبارت $x^4 + x^2 + 1$ کدام عامل وجود دارد؟ (قلم چی)

$x^2 + x$ (۴)

$x^2 + 1$ (۳)

$x^2 + x - 1$ (۲)

$x^2 - x + 1$ (۱)

☑ تست: عامل مشترک دو عبارت $x^2 - x + 3xy - 3y$ و $x^3 + 27y^3 + x^2 + 27xy^2$ کدام است؟ (کاج)

$x + 3y$ (۲)

$(x - 1)(x + 3y)$ (۱)

$(x + 3y)(x^2 - 1)$ (۴)

$(x + 3y)(x + 1)$ (۳)

تست: حاصل عبارت $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1} \div \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x}$ کدام است؟ (گاج)

$$\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} \quad (4)$$

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1} \quad (3)$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} \quad (2)$$

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} \quad (1)$$

تست: ساده شده‌ی عبارت $A = \frac{xy^3 + y^2 + y + 1 - x}{y^2 + y + 1}$ کدام است؟ (قلم چی)

$$y - x \quad (4)$$

$$xy - x + 1 \quad (3)$$

$$y^2 - x \quad (2)$$

$$xy^2 - 1 \quad (1)$$

□ فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

□ درس سوم: توان های گویا

◀ ریشه :

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، آنگاه a را یک ریشه n ام عدد b گویند هرگاه $a^n = b$.

الف) اگر n عددی فرد باشد، a تنها یک ریشه n ام دارد که با نماد رادیکال به صورت $\sqrt[n]{a}$ نمایش داده می شود.

ب) اگر n عددی زوج باشد، عدد مثبت a دو ریشه n ام قرینه هم دارد که با نماد رادیکال به صورت $\sqrt[n]{a}$ و $-\sqrt[n]{a}$ نمایش داده می شود.

◀ تفاوت بین ریشه n ام و $\sqrt[n]{a}$:

حالت اول: اگر n فرد باشد، تفاوتی ندارد. به عنوان مثال ریشه n ام عدد 127 برابر است و

$$\sqrt[3]{128} = 2 \quad \text{می نویسیم}$$

حالت دوم: اگر n زوج باشد و a عدد حقیقی نامنفی باشد، داریم :

$$a \text{ عدد } n \text{ ام ریشه } = \pm \sqrt[n]{a}$$

نکته: وقتی می نویسیم $\sqrt[n]{a}$ و n زوج باشد، a را مثبت یا صفر در نظر می گیریم. به عنوان مثال تمام

عبارت های رادیکالی $\sqrt[3]{-3^2}$ و $\sqrt{-\sqrt{16}}$ و $\sqrt[6]{-64}$ بی معنی هستند.

نکته: اگر $a < 0$ باشد، $a^{\frac{m}{n}}$ تعریف نمی شود. مثلاً عبارات $(-1)^{\frac{1}{3}}$ و $(-2)^{\frac{4}{8}}$ بی معنی اند.

نکته: در ساده کردن فرجه با توان، از داخل رادیکال با فرجه زوج، حتماً عدد نامنفی (داخل قدرمطلق) و از داخل رادیکال با فرجه فرد، خود عدد بیرون می آید.

نکته: در یک عبارت رادیکالی اگر فرجه و توان عبارت زیر رادیکال به عدد خاصی مثل k بخش پذیر

باشد، دو حالت برای ساده کردن آن‌ها وجود دارد:

◀ حالت اول: k عددی فرد باشد، در این حالت داریم:

$$\sqrt[n.k]{a^{m.k}} = \sqrt[n]{a^m}$$

◀ حالت دوم: k عددی زوج باشد، در این حالت داریم:

$$\sqrt[n.k]{a^{m.k}} = \sqrt[n]{|a|^m}$$

نکته: فرض کنید m و n اعداد طبیعی هستند:

الف) اگر $a > 1$ باشد آنگاه:

۱) $a^r > 1 \Rightarrow r$ عددی گویا و مثبت

۲) $m > n \Rightarrow \sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$

۳) $m > n \Rightarrow a^m > a^n$

ب) اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه:

۱) $0 < a^r < 1 \Rightarrow r$ عددی گویا و مثبت

۲) $m > n \Rightarrow \sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$


۳) $m > n \Rightarrow a^m < a^n$

نکته: هرگاه $a > 0$ باشد، آنگاه برای هر دو عدد طبیعی m و n توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای

A چنین تعریف می‌کنیم: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

نکته: مقدار تقریبی عدد $\sqrt{a^2 + b} = \sqrt{m}$ تا یک رقم اعشار برابر $a + \frac{b}{2a}$ است.

(a و b اعداد طبیعی و $a^2 < m$ نزدیکترین عدد مربع کامل به m است.)

مثال: حاصل عبارات زیر را بدست آورید. 

۱) $\sqrt[3]{125}$

۲) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$

۳) $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$

۴) $\sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})^3}$

۵) $\sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$

۶) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[4]{16}$

۷) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$

۸) $5\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - 2\sqrt{7}$

۹) $2\sqrt{18} - 3\sqrt{32} + \sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[4]{64}$

۱۰) $(\sqrt{3} - 2)^{18} \times (\sqrt{3} + 2)^{16}$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید: (تمرین ص ۵۵ کتاب درسی)

$$\sqrt[7]{128} =$$

$$\sqrt[4]{256} =$$

$$\sqrt[9]{-1} =$$

$$\sqrt[4]{625} =$$

$$\sqrt[6]{0} =$$

$$\sqrt[7]{-128} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{-1}{32}} =$$

$$-\sqrt[4]{0.0016} =$$

مثال: حساب کنید. (تمرین ص ۶۱ کتاب درسی)

$$\sqrt[2]{\sqrt{5}} =$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} =$$

مثال: هر یک از توان های کسری زیر را به صورت رادیکال نوشته و در صورت امکان حاصل آن ها را

بدست آورید. (تمرین ص ۶۱ کتاب درسی)

$$16^{\frac{1}{2}} =$$

$$5^{\frac{1}{2}} =$$

$$4^{\frac{3}{7}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$(4^2)^{\frac{2}{3}} =$$

$$4^{\frac{2}{3}} =$$

$$32^{-\frac{1}{5}} =$$

$$32^{\frac{2}{5}} =$$

$$125^{\frac{2}{3}} =$$

مثال: در جاهای خالی یکی از علامت های «>»، «<»، «=» را قرار دهید. (تمرین ص ۵۳ کتاب درسی)

الف) $(-0/1)^5 \bigcirc (-0/1)^3$

ب) $(0/1)^5 \bigcirc (0/1)^3$

پ) $(-2)^5 \bigcirc (-2)^4$

ت) $\sqrt[5]{0/00001} \bigcirc 0/1$

مثال: الف) یکی از علامت های «>» یا «<» یا «=» را در \square قرار دهید. (تمرین ص ۵۵ کتاب درسی)

$$(0/5)^2 \square (0/5)^3$$

$$\sqrt{0/5} \square \sqrt[3]{0/5}$$

$$4^2 \square 4^3$$

$$\sqrt{4} \square \sqrt[3]{4}$$

ب) وقتی $0 < a < 1$ است، یکی از علامت های مقایسه را در \square قرار دهید.

$$a^2 \square a^3 \qquad \sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

پ) وقتی $a > 1$ است، یکی از علامت های مقایسه را در \square قرار دهید.

$$a^2 \square a^3 \qquad \sqrt{a} \square \sqrt[3]{a}$$

مثال: یکی از علامت های $< = >$ را در \square قرار دهید. (تمرین ص ۵۷ کتاب درسی)

$$(-\frac{1}{5})^2 \square (-\frac{1}{5})^3 \qquad (-2)^2 \square (-2)^3$$

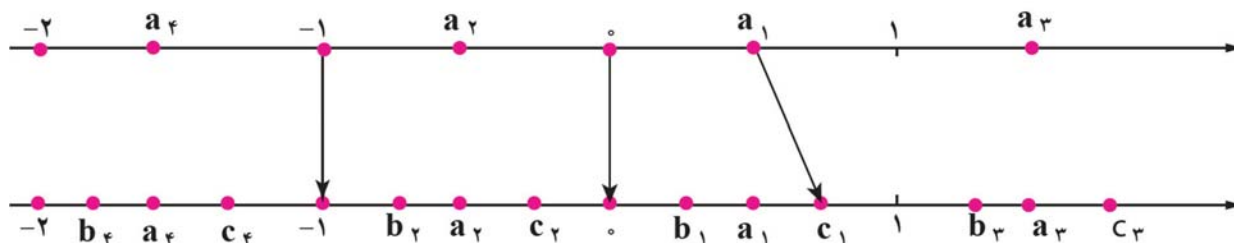
$$(-\frac{1}{5})^3 \square (-\frac{1}{5})^5 \qquad (-2)^3 \square (-2)^5$$

$$(-\frac{1}{5})^4 \square (-\frac{1}{5})^6 \qquad (-2)^4 \square (-2)^6$$

مثال: مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص

شده روی محور پایین که متناظر با ریشه ی سوم آن عدد است، وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه

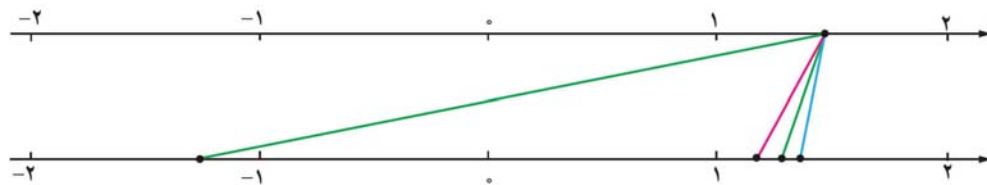
کنید). (تمرین ص ۵۲ کتاب درسی)



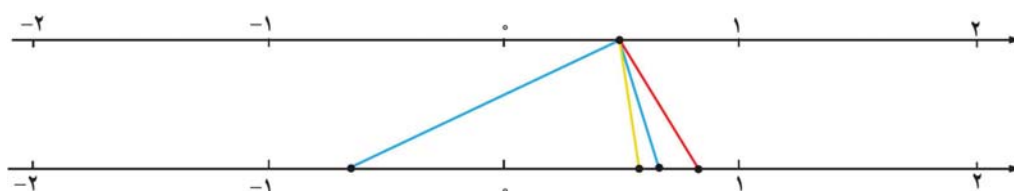


مثال: در هر یک از شکل های زیر، نقطه ای از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل

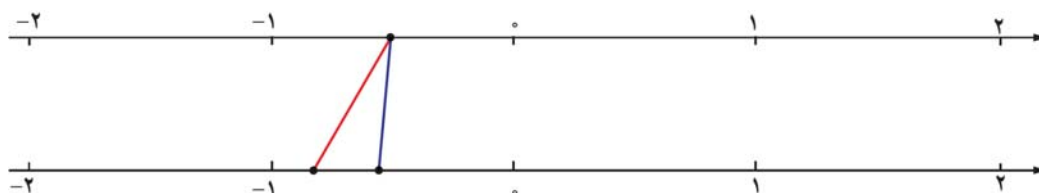
شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است؟ (تمرین ص ۵۲ کتاب درسی)



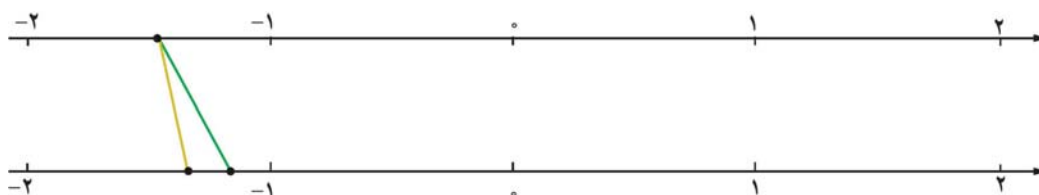
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)



مثال: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 3\sqrt{\dots}}}}$$

تست: اگر x عددی منفی باشد، ساده شده‌ی کسر $\frac{\sqrt[5]{x^5} \times \sqrt{x^8}}{\sqrt[3]{x^3}}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

۱ (۱) $-x$ (۲) x (۳) -1 (۴)

تست: حاصل $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

۱ (۱) $-\sqrt{2}$ -16 (۲) $\frac{1}{16}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

تست: حاصل عبارت $\frac{\sqrt{36}\sqrt[4]{4} + (\sqrt[4]{64})^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[12]{(4^6)^{\frac{1}{4}}}}$ کدام است؟ (قلم چی)

۳ (۴)

۲۸ (۳)

۲۷ + $\sqrt[4]{4}$ (۲)

۲۷ (۱)

تست: حاصل عبارت $A = 5\sqrt[3]{0.027} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{16}} + \sqrt[5]{\frac{-243}{32}}$ کدام است؟ (قلم چی)

-۲ (۴)

-۱/۳ (۳)

۱ (۲)

۱/۵ (۱)

تست: حاصل $(\sqrt{20} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3})\dots(\sqrt{2} - \sqrt{20})$ کدام است؟ (قلم چی)

(۱) $(\sqrt{2})^{20} - 20$

(۲) $(\sqrt{2})^{20} + 20$

(۳) $(\sqrt{2})^{20} - 20\sqrt{20}$

(۴) صفر

تست: اگر x برابر ریشه‌ی سوم ۶۴، برابر با ریشه‌ی دوم ۸۱ باشد، ریشه‌ی دوم x کدام می‌توان باشد؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{1}{5}$

(۳) ۲

(۴) $\frac{2}{25}$

(قلم چی)

تست: حاصل عبارت $A = x^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt[5]{x^2}$ به‌ازای $x = \sqrt[13]{2^{15}}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۸

(۴) ۴

☑ **تست:** اگر $x = \sqrt[3]{\sqrt{3}^{10}}$ باشد، مجذور $\sqrt{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}$ کدام است؟ (کاج)

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۲۷ (۳) ۹ (۴) $9\sqrt{3}$

☑ **تست:** اگر $0 < a < 1$ باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (قلم چی)

- (۱) $0 < a^2 < a < \sqrt{a} < 1$ (۲) $0 < \sqrt{a} < a < a^2 < 1$
 (۳) $0 < a < \sqrt[3]{a} < a^2 < 1$ (۴) $0 < a^2 < \sqrt[3]{a} < a < 1$

☑ **تست:** اگر $0 < a < 1$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر کدام است؟ (قلم چی)

$$A = |a - \sqrt{a}| - |a - \sqrt[3]{a}| + |\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}|$$

- (۱) $2\sqrt[3]{a}$ (۲) $\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}$ (۳) $2a$ (۴) صفر

☑ **تست:** چند عدد صحیح x وجود دارد بطوریکه $7 \leq \sqrt{x} \leq -2$ باشد؟ (قلم چی)

۵۱ (۴)

۵۰ (۳)

۴۹ (۲)

۴۸ (۱)

☑ **تست:** اگر $x \geq 0$ آنگاه حاصل $\sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

 $\sqrt[4]{x^7}$ (۴) $\sqrt[3]{x^3}$ (۳) \sqrt{x} (۲) $x\sqrt{x}$ (۱)

☑ **تست:** عبارت $x\sqrt{-x}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟ (گزینه ۲)

 $|x|\sqrt{-x}$ (۴) $-\sqrt{x^3}$ (۳) $\sqrt{-x^3}$ (۲) $-\sqrt{-x^3}$ (۱)

☑ **تست:** اگر x عددی منفی باشد، آنگاه حاصل عبارت $\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}\sqrt{-x}}$ کدام است؟ (قلم چی)

$\frac{-1}{\sqrt[6]{-x}}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt[6]{-x}}$ (۳)

$-\sqrt[6]{-x}$ (۲)

$\sqrt[6]{-x}$ (۱)

☑ **تست:** حاصل $\sqrt{14-\sqrt{52}} - \sqrt{14+\sqrt{52}}$ کدام است؟ (قلم چی)

-3 (۴)

3 (۳)

-2 (۲)

2 (۱)

☑ تست: مقدار $\sqrt{7} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{27}$ کدام است؟ (قلم چی)

- ۲ (۱) $-2\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ (۲) $4\sqrt{3} + 6$ (۳) -2 (۴)

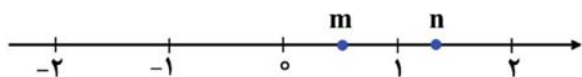
☑ تست: حاصل عبارت $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ کدام است؟

- $-\sqrt{2}$ (۱) -1 (۲) 1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴)

تست: حاصل عبارت $\frac{1}{\sqrt{5}-2} \times (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{5}+2)^2 \times (1+2\sqrt{15}) \times 2^{\sqrt{5}-2}$ کدام است؟ (قلم چی)

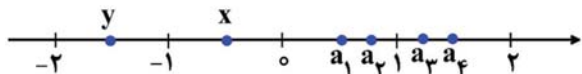
- ۱) $2\sqrt{5}$ (۲) ۳) $4\sqrt{5}$ (۳) ۴) ۱۶ (۴)

تست: در شکل زیر دو نقطه از محور بالا را به ریشه های دوم و سوم هر کدام از نقاط وصل می کنیم. مقادیر x و y به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (قلم چی)



x و y به ترتیب از راست به چپ کدام است؟ (قلم چی)

- ۱) $-a_3, -a_2$ ۲) $-a_4, -a_2$



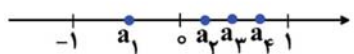
- ۳) $-a_3, -a_1$ ۴) $-a_4, -a_1$

تست: در شکل زیر، نقطه ی a از محور بالا به ریشه های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. کدام نقطه ریشه ی چهارم نقطه ی a است؟ (قلم چی)



نقطه ریشه ی چهارم نقطه ی a است؟ (قلم چی)

- ۱) فقط a_1 ۲) a_1, a_2



- ۳) فقط a_3 ۴) a_1, a_3


□ فصل سوم: توان های گویا و عبارت های جبری

□ درس چهارم: گویا کردن مخرج کسرها

◀ گویا کردن مخرج کسرها:

◀ **حالت اول:** برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ (m و n اعداد طبیعی و $n < m$)، صورت و

مخرج کسر را در $\sqrt[n]{a^{m-n}}$ ضرب می کنیم.

مثال: مخرج کسرهایی زیر را گویا کنید. 

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$


۳) $\frac{1}{\sqrt[7]{5^3}}$

۴) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^7}}$

۵) $\frac{1}{\sqrt[3]{49}}$

◀ **حالت دوم:** برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ یا $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ، صورت و مخرج کسر را

در مزدوج مخرج، ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. 

۱) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(فعالیت ص ۶۶ کتاب درسی)

۲) $\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$

(فعالیت ص ۶۶ کتاب درسی)

۳) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$

۴) $\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

۵) $\frac{1}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

۶) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$$۷) \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

(فعالیت ص ۶۶ کتاب درسی)


$$۸) \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$$

(فعالیت ص ۶۶ کتاب درسی)

◀ **حالت سوم:** برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}}$ ، صورت و مخرج کسر را در عبارت

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{ab}$$

ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. 

$$۱) \frac{1}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}}$$

(فعالیت ص ۶۷ کتاب درسی)

(فعالیت ص ۶۷ کتاب درسی)

۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

۳) $\frac{6}{2\sqrt[3]{2}-1}$

۴) $\frac{1}{\sqrt[6]{2}-1}$

(تمرین ص ۶۷ کتاب درسی)

۵) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}$

(فعالیت ص ۶۷ کتاب درسی)


۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$

(فعالیت ص ۶۷ کتاب درسی)

۷) $\frac{x+8}{\sqrt[3]{x+2}}$

◀ **حالت چهارم:** برای گویا کردن مخرج کسرهایی به صورت $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} \pm \sqrt[3]{ab}}$ ، صورت و مخرج کسر

را در $\sqrt[3]{a} \mp \sqrt[3]{b}$ ضرب می‌کنیم.

مثال: مخرج کسره‌های زیر را گویا کنید. 

۱) $\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}}$

۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}$

☑ **تست:** با فرض $x = 2 + \sqrt{3}$ ، حاصل $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟ (قلم چی)

$\sqrt[4]{3}$ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

$2 - \sqrt{3}$ (۱)

☑ تست: حاصل عبارت $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}}$ کدام است؟ (قلم چی)

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{6} + 1 \quad (3)$$

$$\sqrt{6} - 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (1)$$

☑ تست: حاصل $\frac{1}{3\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{3}}$ کدام است؟ (قلم چی)

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} + 1 \quad (3)$$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} - 1 \quad (1)$$

☑ تست: حاصل عبارت $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$ کدام است؟ (قلم چی)

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} \quad (1)$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} - \sqrt{2} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \quad (3)$$

☑ تست: ساده شده عبارت $\left| \frac{\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} \right| - \left| \frac{4\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right|$ کدام است؟ (قلم چی)

$$-2\sqrt{5} \quad (4)$$

$$2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{5} \quad (2)$$

$$-\sqrt{5} \quad (1)$$

☑ **تست:** گویا شده عبارت $\frac{1}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}}$ کدام است؟ (کاج)

$\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}$ (۴)

$\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{6}$ (۳)

$\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ (۲)

$\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ (۱)

☑ **تست:** ساده شده عبارت $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} + \dots + \frac{1}{3+\sqrt{10}}$ کدام است؟ (کاج)

۱(۴)

$1 - \sqrt{10}$ (۳)

$\sqrt{10} - 1$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

☑ **تست:** حاصل $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3} + 1$ کدام است؟ (گزینه ۲)

$\sqrt{3} - 1$ (۴)

۳ (۳)

$2\sqrt{3} - 1$ (۲)

۱ (۱)

☑ **تست:** ساده شده‌ی کسر $A = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

$1 - \sqrt{2}$ (۴)

$1 + \sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{2} - 1$ (۲)

$1 + \sqrt{2}$ (۱)



فصل چهارم

معادله ها و نامعادله ها

□ فصل چهارم: معادله ها و نامعادله ها

□ درس اول: معادله درجه دوم


◀ معادله درجه دوم:

هر معادله به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ (که در آن $a \neq 0$) و a ، b و c اعداد حقیقی هستند را یک معادله درجه‌ی دوم می‌نامیم.

◀ حل معادله درجه دوم به روش تجزیه:

اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $AB = 0$ آنگاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است یعنی:

$$AB = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \text{یا} \\ B = 0 \end{cases}$$

 **مثال:** معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید.

۱) $3x^2 - x = 0$

(کار در کلاس صفحه ۷۱ کتاب درسی)

۲) $x^2 - 3x = 10$

(کار در کلاس صفحه ۷۱ کتاب درسی)

$$۳) ۴x^2 - ۴x + ۱ = ۰$$

$$۴) x^2 - ۶x^2 + ۱۲x - ۸ = ۰$$

$$۵) x^2 - ۴ = ۰$$

$$۶) 5t^2 = 20$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۷) x^2 - 11x = -10$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۸) 4k^2 - 12k + 8 = 0$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۹) 5a^2 - 7a = 2a(a - 3)$$


(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

◀ حل معادله درجه دوم به روش ریشه گیری:

اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگ تر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله ی درجه ی دوم $x^2 = a$ عبارتند از:

$$x = \sqrt{a} \quad , \quad x = -\sqrt{a}$$



مثال: معادله‌های زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید. 

$$۱) ۵x^2 - ۱۰۰ = ۰$$

$$۲) x^2 + ۷ = ۰$$

(کار در کلاس صفحه ۷۳ کتاب درسی)

$$۳) (x - 2)^2 = ۱۶$$

(کار در کلاس صفحه ۷۳ کتاب درسی)

$$۴) x^2 + 12 = 3$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)



$$5) n^2 - 2 = 26$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$6) 3 - 3k = 3k(2k - 1)$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$7) (3t - 2)^2 = 4$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

◀ حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی (Δ):


برای حل $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا $\Delta = b^2 - 4ac$ را به دست می آوریم:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی حقیقی متمایز} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow \text{دو ریشه‌ی حقیقی یکسان (ریشه‌ی مضاعف)} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

$$3) \Delta < 0 \Rightarrow \text{بدون ریشه}$$



مثال: معادله‌های زیر را به روش Δ حل کنید. 

۱) $3x^2 + 7x + 4 = 0$

۲) $5x^2 + x - 6 = 0$

۳) $2x^2 + 3x - 7 = 0$



$$۴) x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$۵) 9x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$۶) 5x^2 + 2x + 1 = 0$$





$$۷) x^2 - x + 1 = 0$$

(کار در کلاس صفحه ۷۵ کتاب درسی)

$$۸) -2x^2 + x + 3 = 0$$

(کار در کلاس صفحه ۷۵ کتاب درسی)

$$۹) -x^2 + 4x - 4 = 0$$

(کار در کلاس صفحه ۷۵ کتاب درسی)





$$۱۰) r - r^2 = 3$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۱۱) 4x^2 - 13x + 3 = 0$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۱۲) \frac{t^2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)





$$۱۳) a^2 - 2\sqrt{3}a = 9$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

نکته: در حل معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a + b + c = 0$ باشد، ریشه‌های معادله $x = 1$ و

$x = \frac{c}{a}$ هستند و اگر $a + c = b$ باشد، ریشه‌های معادله $x = -1$ و $x = \frac{-c}{a}$ می‌باشند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) ۷x^2 + ۸x - ۱۵ = 0$$

$$۲) ۹x^2 + ۲۳x + ۱۴ = 0$$



$$۳) ۱۸x^2 + ۷x - ۲۵ = ۰$$

$$۴) ۱۳x^2 - ۸x - ۲۱ = ۰$$

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل:

مثال: معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید. 

$$۱) x^2 - ۶x + ۴ = ۰$$

(مثال صفحه ۷۳ کتاب درسی)

$$۲) x^2 + ۷x + ۵ = ۰$$



$$۳) x^2 + 2x = 44$$

(کار در کلاس صفحه ۷۴ کتاب درسی)

$$۴) x^2 + 3x = 3$$

(کار در کلاس صفحه ۷۴ کتاب درسی)

$$۵) x^2 - 4x + 5 = 0$$

(کار در کلاس صفحه ۷۴ کتاب درسی)





$$۶) 2x^2 + x - 2 = 0$$

(کار در کلاس صفحه ۷۴ کتاب درسی)

$$۷) ۳x^۲ + ۲x - ۵ = ۰$$

$$۸) s^2 - 3s + 3 = 0$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)





$$۹) x^2 - 6x = 7$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۱۰) 2a^2 + 5a - 3 = 0$$


(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

$$۱۱) r^2 + 4r + 4 = 0$$

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)





مثال: هر یک از معادله های زیر را به روش دلخواه حل کنید. (تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی) 

۱) $9 - 6z + z^2 = 0$

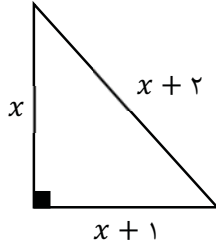
۲) $2x^2 = 250$

۳) $b^2 + \sqrt{2}b - 4 = 0$

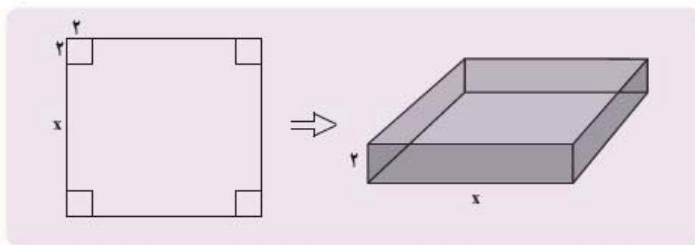
۴) $4a^2 + 13a = 1$



مثال: با توجه به شکل مقابل، مقدار x را به دست آورید.



مثال: با یک دستگاه برش، یک صفحه‌ی مقوایی به شکل مربع را برش می‌زنیم. سپس، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را جدا می‌کنیم. بعد با تا زدن لبه‌ها، یک جعبه می‌سازیم. اگر مربع‌های جداشده به ضلع 2cm باشند و بخواهیم حجم این جعبه، 200 سانتی‌متر مکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی را که باید برای این کار انتخاب شوند، به دست آورید. (مثال صفحه ۷۲ کتاب درسی)



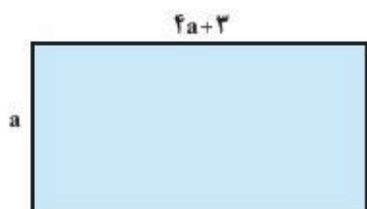


مثال: از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول

و عرض این مستطیل را مشخص کنید. (مثال صفحه ۷۶ کتاب درسی)

مثال: طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌مترمربع

باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید. (تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)



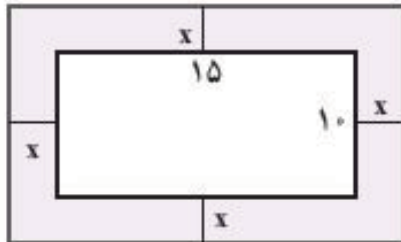


مثال: یک عکس به اندازه 10 در 15 سانتی متر درون یک قاب با مساحت 300 سانتی متر مربع، قرار دارد.



اگر فاصله‌ی همی لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد این قاب عکس را پیدا کنید.

(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)



مثال: مجموع مربعات دو عدد فرد متوالی 290 است. این دو عدد را پیدا کنید.



(تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)





مثال: اختلاف سنی دو برادر با یکدیگر ۴ سال است. اگر چهار سال دیگر ضرب سنی آن‌ها ۶۰ شود، سن



هر کدام چقدر است؟ (تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)

مثال: در یک تیمگان (لیگ) والیبال، ۴۵ بازی انجام شده است. اگر هر تیم با دیگر تیم‌های تیمگان، تنها



یک بازی انجام داده باشد، تعداد تیم‌های این تیمگان را به دست آورید. اگر تعداد بازی‌های تیمگان n و تعداد تیم

ها n باشد، الگویی برای تعداد بازی‌ها به دست آورید. (تمرین صفحه ۷۶ کتاب درسی)





☑ **تست:** یک معادله درجه‌ی دوم به صورت $(x - 1)(3x + k) = 0$ تجزیه شده است. اگر مجموعه جواب معادله

{۱ و -۲} باشد، مقدار k چقدر است؟ (گاج)

-۶ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

-۲ (۱)

☑ **تست:** اگر $x = 2$ یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 5x + a = 1$ باشد، ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

(گاج)

۶ (۴)

-۶ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)





☑ **تست:** اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $(m^2 + 1)x^2 - x - (m - 1) = 0$ برابر ۲- باشد، جواب دیگر این

معادله کدام است؟ (قلم چی)

۱ (۴)

 $\frac{-3}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۲)

۲ (۱)

☑ **تست:** اگر یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x + m = 0$ برای دلتای باشد، مقدار مثبت m چقدر است؟

(کاج)

۱ (۴)

 $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{16}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)



☑ **تست:** معادله‌ی $x^2 + 4x = 1$ را به کمک مربع کامل کردن حل کرده ایم و به عبارت $(x + a)^2 = b$

رسیده‌ایم، مقدار $a+b$ چقدر است؟ (گاج)

۴ (۴)

۲ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

☑ **تست:** معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 8x - 1 = 0$ پس از مربع کامل کردن به صورت $2(x - x_0)^2 + y_0 = 0$

درآمده است. حاصل $x_0 + y_0$ چقدر است؟ (قلم چی)

-۷ (۴)

۱۱ (۳)

-۱۱ (۲)

۷ (۱)



☑ **تست:** اگر سه جمله‌ای درجه دوم $2x^2 - 3x + b$ را به صورت مربع کامل بنویسیم، مقدار b کدام است؟

(سنجش)

$$\frac{9}{16} \text{ (۴)}$$

$$\frac{9}{10} \text{ (۳)}$$

$$\frac{9}{8} \text{ (۲)}$$

$$\frac{9}{4} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** به ازای کدام مقدار m معادله‌ی $3x^2 - mx + 4 = 0$ یک ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد؟ (گاج)

$$4\sqrt{3} \text{ (۴)}$$

$$-4\sqrt{3} \text{ (۳)}$$

$$2\sqrt{3} \text{ (۲)}$$

$$-2\sqrt{3} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** اگر معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ دارای ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{1}{4}$ باشد، کدام است؟ (گزینه ۲)

$$\frac{3}{4} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{-1}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{-3}{4} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** اگر معادله‌ی $mx^2 - (2m - 1)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه‌ی متمایز باشد، حدود m کدام

است؟ (گاج)

$$m > \frac{1}{8} \text{ (۴)}$$

$$m > \frac{-1}{8} \text{ (۳)}$$

$$m < \frac{1}{8} \text{ (۲)}$$

$$m < \frac{-1}{8} \text{ (۱)}$$



☑ **تست:** جواب های معادله $(x + 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ چگونه اند؟ (کاج)

(۱) دو جواب قرنیه

(۲) دو جواب منفی

(۳) دو جواب مثبت

(۴) جواب ندارد

☑ **تست:** مجموع ریشه های معادله $x^2 - 2x + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$ کدام است؟ (قلم چی)

۳ (۴)

$2\sqrt{2}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)





☑ **تست:** تفاضل مکعبات دو عدد طبیعی متوالی ۶۱ است. مجموع مربعات دو عدد چقدر است؟ (گاج)

۶۳ (۴)

۳۹ (۳)

۲۵ (۲)

۴۱ (۱)

☑ **تست:** کدام یک از اعداد زیر را نصف مربعش ۵ واحد کمتر است؟ (گاج)

-۱ - √۱۱ (۴)

۱ + ۲√۱۱ (۳)

-۱ + √۱۱ (۲)

۱ - √۱۱ (۱)





☑ **تست:** مجموع مربعات سه مضرب طبیعی و متوالی ۵، ۱۹۲۵ است. مجموع آنها کدام است؟ (قلم چی)

۹۰ (۴)

۷۵ (۳)

۱۰۵ (۲)

۶۰ (۱)

☑ **تست:** نردبانی به طول ۱۳ متر را طوری به دیوار یک ساختمان تکیه داده ایم که فاصله‌ی پای نردبان تا دیوار

۷ متر کمتر از سر نردبان تا زمین است. فاصله‌ی سر نردبان تا زمین چقدر است؟ (قلم چی)

۱۵ (۴)

۸ (۳)

۱۲ (۲)

۵ (۱)





☑ **تست:** می خواهیم زمینی مستطیل شکل به مساحت ۱۲۰ متر مربع را با فرشی به ابعاد ۳ و ۵ متر بپوشانیم.

اگر فاصله‌ی همه‌ی لبه‌های فرش تا دیوار برابر باشد، محیط این زمین کدام است؟ (کاج)

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

۳۰ (۲)

۴۴ (۱)

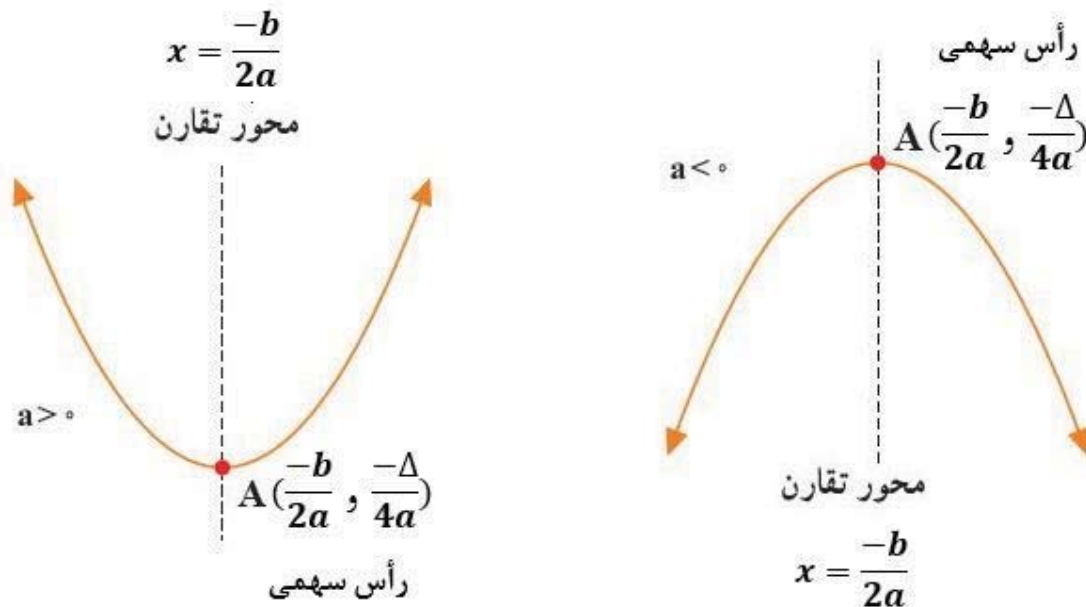



□ فصل چهارم: معادله ها و نامعادله ها

□ درس دوم: سهمی

◀ سهمی:

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن $a \neq 0$ و b و c اعداد حقیقی هستند و a یک سهمی می گوئیم.



مثال: رأس و خط تقارن سهمی های زیر را به دست آورید. 

1) $y = x^2 + 6x - 5$

2) $y = 3x^2 + 5x + 2$

نکته: هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، رأسی به مختصات (h, k) و خط تقارنی با معادله $x = h$ دارد.

مثال: رأس و خط تقارن سهمی های زیر را به دست آورید.

1) $y = (x + 3)^2 - 7$

2) $y = -5(x - 2)^2 + 3$

مثال: سهمی های زیر را رسم کنید.

1) $y = x^2 - 4x + 7$

$$2) y = -2x^2 + 6x + 1$$

$$3) y = -2x^2 + 4x - 3$$

(مثال ص ۸۰ کتاب درسی)

$$4) y = x^2 - 4x + 4$$

5) $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$

(تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

6) $y = 3x^2 - 2$

(تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

7) $y = -2x^2 + 1$

(کار در کلاس ص ۸۰ کتاب درسی)

8) $y = x - x^2$

(تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

9) $y = (x + 1)^2 - 2$

(کار در کلاس ص ۸۰ کتاب درسی)

10) $y = -2(x - 1)^2 + 5$



11) $y = -(x + 1)^2 - 3$

(تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

مثال: اگر $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست

آورید. (تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

مثال: اگر $(3, 7)$ و $(-11, 7)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، خط تقارن این سهمی را به دست

آورید.

مثال: نمودار $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول

۱- و ۲ قطع کرده است. معادله ی این سهمی را بنویسید. (تمرین ص ۸۱ کتاب درسی)

تست: اگر خط $x = 2$ خط تقارن سهمی $y = (m - 1)x^2 + x + 3$ باشد، مقدار m کدام است؟ (گزینه ۲)

$\frac{5}{4}$ (4)

$\frac{4}{5}$ (3)

$\frac{3}{4}$ (2)

$\frac{4}{3}$ (1)

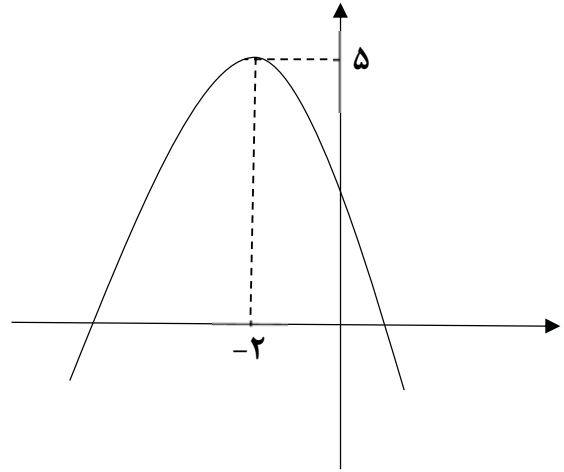
☑ تست: شکل روبرو، نمودار کدام سهمی می تواند باشد؟ (قلم چی)

1) $y = x^2 + 4x + 3$

2) $y = -x^2 - 2x + 4$

3) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$



☑ تست: اگر کمترین مقدار تابع $y = 2x^2 + 12x + m - 1$ برابر با (-1) باشد، سهمی مذکور محور

عرض ها را با چه عرضی قطع می کند؟ (قلم چی)

۲۰(۴)

۱۹(۳)

۱۸(۲)

۱۷(۱)

☑ **تست:** منحنی $y = ax^2 - x - 2$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن است، محل تلاقی سهمی با محور x ها کدام است؟ (گاج)

- (1) $1 \pm \sqrt{3}$ (2) $2 \pm \sqrt{3}$ (3) $2(1 \pm \sqrt{3})$ (4) تلاقی ندارد

☑ **تست:** سهمی $y = -x^2 + 2x - 3$ از کدام نواحی مختصاتی عبور نمی کند؟ (گاج)

- (1) اول و دوم (2) اول و چهارم (3) فقط اول (4) فقط دوم

☑ **تست:** در سهمی به معادله $y = 2ax^2 + bx + c$ خط $x = 1$ محور تقارن سهمی و نمودار آن محور x ها

را در نقطه $x = \frac{1}{2}$ قطع می کند. اگر مقدار ماکزیمم نمودار سهمی برابر ۱ باشد، عرض نقطه ی تلاقی نمودار

سهمی با محور y ها، کدام است؟ (سنجش)

(4) -2

(3) $-\frac{5}{2}$

(2) -3

(1) $-\frac{3}{2}$

☑ **تست:** اگر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه متقارن باشد، آنگاه لزوماً سهمی در کجا

قرار دارد؟ (سنجش)

(۲) ناحیه دوم دستگاه مختصات

(۱) ناحیه اول دستگاه مختصات

(۴) محور y ها

(۳) محور x ها

☑ **تست:** نمودارهای دو سهمی به معادلات $y = x^2 - 2x - 2$ و $y = 3x^2 - 3x - 5$ در چند نقطه و در کدام ناحیه ها یک دیگر را قطع می کنند؟ (سنجش)

- (۱) ۱ نقطه - ناحیه چهارم
 (۲) ۱ نقطه - ناحیه سوم
 (۳) ۲ نقطه - ناحیه اول و سوم
 (۴) ۲ نقطه - ناحیه دوم و چهارم

☑ **تست:** اگر خط $3 = 0 + \frac{x}{2}$ از رأس سهمی به معادله $y = \frac{x^2}{a} + \frac{x}{2} - 4a$ عبور کند، سهمی محور عرض ها را در چه نقطه ای قطع می کند. (گاج)

- (۱) ۹۶
 (۲) ۲۴
 (۳) -۲۴
 (۴) -۹۶

☑ **تست:** اگر سهمی به معادله $y = -x^2 + 3x - m$ بر خط $y = \frac{1}{4}$ مماس باشد، مقدار m کدام است؟ (گاج)

۱ (۴)

۳ (۳)

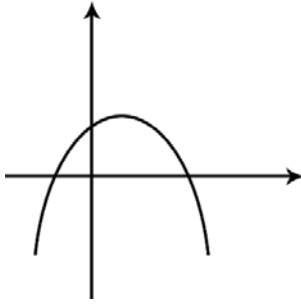
۲ (۲)

۴ (۱)

☑ **تست:** اگر سهمی $y = -x^2 + x - m$ همواره زیر خط $y = 2$ واقع شود، حدود m کدام است؟ (گاج)

 $m > \frac{-7}{4}$ (۴) $m > \frac{-9}{4}$ (۳) $m > -1$ (۲) $m > -2$ (۱)

☑ **تست:** اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، علامت های a و b و c کدام است؟ (گاج)



(۱) $a < 0$ و $b > 0$ و $c < 0$ (۲) $a < 0$ و $b > 0$ و $c > 0$

(۳) $a < 0$ و $b < 0$ و $c > 0$ (۴) $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$

☑ **تست:** یک سهمی محور y ها را در نقطه ای به عرض -3 و محور x ها را در نقاط به طول 1 و 3 قطع کرده است.

معادله سهمی کدام است؟ (گاج)

(۲) $y = x^2 - 4x + 3$

(۱) $y = -x^2 - 4x - 3$

(۴) $y = -x^2 + 4x - 3$

(۳) $y = x^2 - 4x - 3$

☑ **تست:** سهمی $y = 2x^2 + bx + 6$ بر قسمت منفی محور x ها مماس است. معادله محور تقارن آن کدام است؟ (قلم چی)

$$x = -4\sqrt{3} \quad (۴)$$

$$x = 2\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$x = \sqrt{3} \quad (۲)$$

$$x = -\sqrt{3} \quad (۱)$$

☑ **تست:** اگر معادله سهمی به معادله $y = -2x^2 + 4x - 1$ را به صورت $y = -2(x - h)^2 + k$ بنویسیم، مقدار $h+k$ کدام است؟ (سنجش)

$$۳ \quad (۴)$$

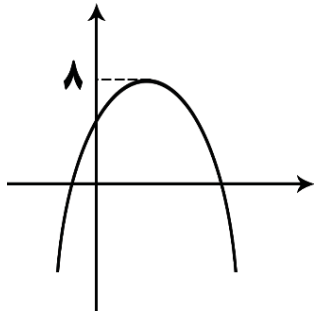
$$۲ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$\text{صفر} \quad (۱)$$

☑ **تست:** نمودار سهمی به معادله $y = -2x^2 + ax + a + 2$ به صورت زیر است. این سهمی قسمت مثبت

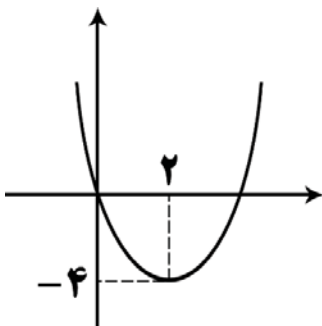
محور x ها را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟ (قلم چی)



۳ (۲) ۵ (۱)

۴ (۴) $\frac{3}{2}$ (۳)

☑ **تست:** کدام یک از معادلات زیر مربوط به سهمی روبرو است؟ (قلم چی)



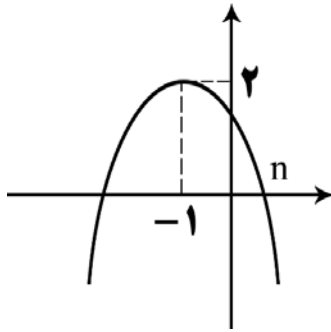
$y = (x - 2)^2 + 4$ (۱)

$y = (x + 2)^2 - 4$ (۲)

$y = -(x - 2)^2 - 4$ (۳)

$y = (x - 2)^2 - 4$ (۴)

☑ **تست:** شکل زیر مربوط به سهمی $y = mx^2 - 2x + k$ است. حاصل $m+n+k$ کدام است؟ (گاج)



$$\sqrt{2} + 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2} - 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (4)$$

$$-\sqrt{2} - 1 \quad (3)$$

☑ **تست:** نقطه (۳ و ۴) رأس یک سهمی درجه دوم است که نمودار آن، پاره خطی به طول ۸ روی محور x ها جدا می‌کند. نمودار این منحنی محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (قلم چی)

$$\frac{5}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} \quad (2)$$

$$\frac{7}{4} \quad (1)$$

☑ **تست:** خط به معادله $y = -\frac{5}{2}x$ محور تقارن منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می کند، a کدام است؟ (قلم چی)

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

☑ **تست:** اگر سهمی $y = ax^2 - bx + c$ محور عرض ها را در نقطه ای به عرض $-\frac{4}{b}$ و محور طول ها را فقط در نقطه ای به عرض -۲ قطع کند، a کدام است؟ (سهمی پایین محور x ها قرار دارد.) (قلم چی)

(۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{4}$

☑ **تست:** محور تقارن سهمی $y = -2x^2 + 5x - 1$ خط به معادله $ax - 2y = 1$ را در نقطه ای به عرض

$\frac{11}{8}$ قطع می کند. a کدام است؟ (قلم چی)

-۳ (۴)

-۲ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

☑ **تست:** اگر نقاط برخورد تابع $f(x) = 0/5x^2 + x - 7/5$ با محورهای مختصات رئوس یک مثلث باشند،

مساحت مثلث مورد نظر کدام است؟ (قلم چی)

۹۰ (۴)

۳۰ (۳)

۶۰ (۲)

۱۵ (۱)

☑ **تست:** حاصل جمع طول و عرض رأس سهمی $y = ax^2 + bx + \frac{35}{4a}$ برابر صفر است. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟ (قلم چی)

۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)

☑ **تست:** اگر دو نقطه (a, m) و (b, m) روی سهمی $y = 2x^2 + 7x + 1$ باشند، حاصل $(a + b)^2$ کدام است؟ (گاج)

۱ (۱) $\frac{49}{2}$ ۲ (۲) ۴۹ ۳ (۳) $\frac{49}{4}$ ۴ (۴) $\frac{49}{16}$

☑ **تست:** رأس سهمی $y = 3x^2 + mx + 2$ روی نیم ساز ربع دوم قرار دارد. مقدار m کدام می تواند باشد؟

(گاج)

۶ (۴)

-۶ (۳)

-۴ (۲)

۴ (۱)

□ فصل چهارم: معادله ها و نامعادله ها

□ درس سوم: تعیین علامت و نامعادله

◀ **تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی اول**: برای تعیین علامت عبارت $y = ax + b$ ابتدا ریشه‌ی آن را به دست می‌آوریم و سپس طبق جدول زیر رفتار می‌کنیم.

x	$-\frac{b}{a}$
$y = ax + b$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> ○ ○ </div> <div style="display: flex; justify-content: space-between; padding: 0 10px;"> مخالف علامت a موافق علامت a </div>

مثال: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $y = 3x + 7$

۲) $y = -5x + 1$

۳) $y = 4 - x$

$$۴) y = (۳x + ۱)(x - ۲)$$

$$۵) y = \frac{x - ۵}{۳ - ۲x}$$

$$۶) y = (۲x - ۷)^۴$$

$$۷) y = -|x + ۵|$$

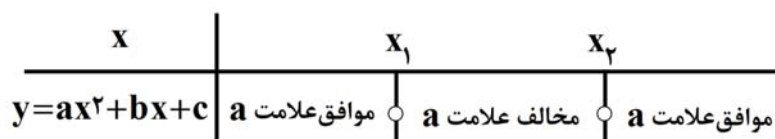
$$۸) y = (۶ - ۲x)^y$$

$$۹) y = x^۲(۷ - x)$$

◀ **تعیین علامت چندجمله‌ای درجه‌ی دوم:** برای تعیین علامت عبارت $y = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا ریشه‌های

آن را بدست می‌آوریم و داریم:

$$(۱) \Delta > ۰: \text{ دو ریشه‌ی حقیقی } (x_1 < x_2)$$



(۲) $\Delta = 0$: یک ریشه مضاعف

x	x_1
$y = ax^2 + bx + c$	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 5px;">موافق علامت a</div> <div style="border-left: 1px solid black; width: 10px; height: 10px; margin: 0 5px;"></div> <div style="margin-left: 5px;">موافق علامت a</div> </div>

(۲) $\Delta < 0$: بدون ریشهالف) $a > 0$: همواره مثبتب) $a < 0$: همواره منفی**مثال:** تعیین علامت کنید. 

۱) $y = 3x^2 + 7x + 4$

۲) $y = -5x^2 + 3x + 2$

$$۳) y = x^2 - 6x + 9$$

$$۴) y = -4x^2 + 4x - 1$$

$$۵) y = 7x^2 - 2x + 1$$

$$۶) y = -3x^2 + 5x - 7$$

$$۷) y = \frac{۷ - x}{x^2 - ۵x + ۶}$$

$$۸) y = \frac{۳x^2 + ۵x + ۲}{-۲x^2 + x - ۷}$$

◀ **نامعادله درجه اول**: اگر نامعادله‌ی داده شده درجه اول بود، معلوم‌ها را یک طرف و مجهول‌ها را در طرف دیگر قرار می‌دهیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

نکته: برای حل یک نامعادله می‌توانیم از خواص زیر استفاده کنیم: 

۱- خاصیت جمع: برای عبارت‌های جبری A ، B و C ، اگر $A < B$ سپس $A + C < B + C$.


۲- خاصیت ضرب:

الف) اگر $C > 0$ و $A > B$ سپس $AC > BC$

ب) اگر $C < 0$ و $A > B$ سپس $AC < BC$

نکته: 

نامعادله	می خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید. 

۱) $5x - 1 \geq 3x - 7$

(مثال ص ۸۹ کتاب درسی)

$$۲) 2x + 5 < 7x + 9$$

$$۳) 1 < 2x - 3 \leq 3$$

(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)


$$۴) -2 < \frac{5-x}{2} < 0$$

(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)



$$5) \quad x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$$


(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)

مثال:  حداقل و حداکثر دمای یک شهر در یک روز، ۱۵ و ۲۵ درجه سانتی گراد و رابطه ای که درجه فارنهایت (F) را به سانتی گراد (C) تبدیل می کند، به صورت $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ است. حداقل و حداکثر دمای این شهر را بر حسب فارنهایت تعیین کنید. (کاردکلاس صفحه ۹۰ کتاب درسی)





◀ **نامعادله غیر از درجه اول:** اگر نامعادله غیر از درجه اول باشد، ابتدا همه‌ی عبارت‌ها را به یک سمت برده و ریشه یا ریشه‌های آن را بدست می‌آوریم و سپس به کمک تعیین علامت، نامعادله را حل می‌کنیم.

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید. 

۱) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

(کار در کلاس ص ۹۰ کتاب درسی)

۲) $x(x^2 + 4) < 0$

(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)



(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)

$$۳) \frac{۴ - ۲x}{۳x + ۱} \geq ۰$$


(مثال ص ۹۱ کتاب درسی)

$$۴) \frac{x^2 - ۹}{۲x + ۱} \leq ۰$$



$$۵) \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} < 0$$


(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)

مثال: برای چه مقادیری از m ، عبارت $y = x^2 + mx + 1$ همواره مثبت است؟ 


(مثال صفحه ۹۰ کتاب درسی)





مثال: به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟ 

(تمرین صفحه ۹۳ کتاب درسی)

مثال: به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟ 

(تمرین صفحه ۹۳ کتاب درسی)




مثال: یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه‌ی t از رابطه‌ی $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله‌ی زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟ (تمرین صفحه ۹۳ کتاب درسی)

مثال: تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟ (تمرین صفحه ۹۳ کتاب درسی)

نکته: 

$$۱) x^2 \leq a^2 \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$۲) x^2 \geq a^2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ \text{یا} \\ x \leq -a \end{cases}$$

مثال:  نامعادله‌های زیر را حل کنید.

(کار در کلاس ص ۹۰ کتاب درسی)

$$۱) x^2 \leq 4$$

$$۲) 5x^2 \geq 125$$

$$۳) (x - 2)^2 \leq 9$$



◀ **نامعادله‌های قدرمطلقى:** فرض کنیم a یک عدد حقیقی مثبت و u یک عبارت جبری باشد. در اینصورت

داریم:

$$۱) |u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$$

$$۲) |u| \geq a \Rightarrow \begin{cases} u \geq a \\ \text{یا} \\ u \leq -a \end{cases}$$

مثال: نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱) |x - 3| \leq 2$$

(مثال ص ۹۲ کتاب درسی)

$$۲) |7 - 2x| < 1$$

(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)

$$۳) \left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$$

(کار در کلاس ص ۹۳ کتاب درسی)



(مثال ص ۹۲ کتاب درسی)

$$۴) |2x - 1| > 5$$

(کار در کلاس ص ۹۳ کتاب درسی)

$$۵) |5 - 2x| \geq 1$$

(تمرین ص ۹۳ کتاب درسی)

$$۶) \left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$$



مثال: یک نامعادله‌ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه‌ی $(1, 9)$ باشد.



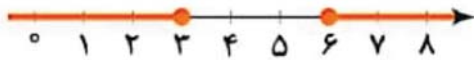
(کار در کلاس صفحه ۹۳ کتاب درسی)



مثال: یک نامعادله‌ی قدرمطلق بنویسید که مجموعه جواب آن $(-\infty, 3] \cup [6, +\infty)$ باشد.



(کار در کلاس صفحه ۹۳ کتاب درسی)



☑ **تست:** عبارت $P(x) = x^2 + ax + b$ به ازای $2 < x < 3$ منفی و به ازای بقیه‌ی مقادیر نامنفی است. مقدار

$a + b$ کدام است؟ (گزینه‌ی ۲)

-۱۱ (۴)

۱۱ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

☑ **تست:** اگر جدول تعیین علامت عبارت $A = 2x^3 - ax^2 + b$ به شکل زیر باشد، $a + b$ کدام است؟

(قلم چی)

۱۴ (۲)

۱۰ (۱)

-۱۴ (۴)

-۱۰ (۳)

x	-۲	۱	
A	-	-	+

☑ **تست:** اگر جدول تعیین علامت $y = ax + b$ به شکل مقابل باشد، جدول تعیین علامت $y = bx - a$ به کدام صورت می‌تواند باشد؟ (گزینه‌ی ۲)

x	۲
$ax+b$	+ -

x	$\frac{1}{۲}$
$bx-a$	- +

 (۲)

x	$-\frac{1}{۲}$
$bx-a$	- +

 (۱)

x	$-\frac{1}{۲}$
$bx-a$	+ -

 (۴)

x	$\frac{1}{۲}$
$bx-a$	+ -

 (۳)

☑ **تست:** اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $۲x^2 - bx + ۶ = ۰$ و رابطه‌ی $x_1 < ۲ < x_2$ بین ریشه‌ها برقرار باشد،

حدود b کدام است؟ (سنجش)


$$b < ۷ \text{ (۴)}$$

$$b > ۷ \text{ (۳)}$$

$$b < -۷ \text{ (۲)}$$

$$b > -۷ \text{ (۱)}$$

تست: جدول تعیین علامت مقابل، مربوط به کدام تابع است؟ (گاج)

x	-2	1
P(x)	+ 	-


$$P(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2} \quad (1)$$

$$P(x) = (x+2)^2(x-1) \quad (2)$$

$$P(x) = \frac{(x-1)^2}{(2x+4)^6} \quad (3)$$

$$P(x) = \frac{(1-x)^3}{(x+2)^6} \quad (4)$$

تست: جدول تعیین علامت کدام یک از چندجمله‌های زیر به صورت زیر می‌باشد؟ (قلم چی)

x	-2	1
y	- 	+

$$y = x^2 - x + 2 \quad (2)$$

$$y = x^2 + x - 2 \quad (1)$$

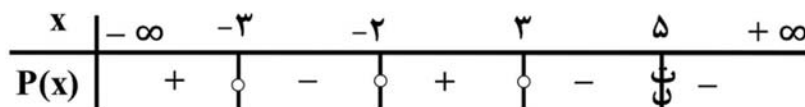
$$y = x^3 - 3x^2 + 4 \quad (4)$$

$$y = x^3 + 3x^2 - 4 \quad (3)$$

تست: اگر نتیجه‌ی جدول تعیین علامت عبارت $P(x) = \frac{-2(x^2 - a^2)(x + b)}{(3x - c)^2}$ به صورت زیر باشد،

$a^2b - c$ کدام است؟ (قلم چی)

- ۳ (۱) -۳۳ (۲) -۳ (۳) ۳۳ (۴)



تست: x کدام بازه باشد تا عبارت $A = (2 - |x|)(2x - 6)$ منفی باشد؟ (قلم چی)

- (۲, +∞) (۱) (-۲, ۳) (۲) (-۲, ۲) ∪ (۳, +∞) (۳) (-∞, ۲) (۴)

تست: حاصل عبارت $\frac{x^2(x^2 - x + 1)(2 - x)(x - 1)^3}{-|x + 2|(-2x^2 + x - 1)(x + 1)^4}$ در کدام بازه بزرگتر یا مساوی صفر است؟ (سنجش)

(۱) $[0, 1]$

(۲) $[1, 2]$

(۳) $(-2, -1) \cup [1, 2]$

(۴) $(-1, 0] \cup [0, 1]$

تست: جواب نامعادله $\frac{x^2 + x - 2}{|x| + 1}$ را به صورت $|x - \alpha| < \beta$ تبدیل کرده ایم. مقدار $\alpha + \beta$ چقدر است؟ (کاج)

(۱) ۱

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۳) $-\frac{1}{2}$

(۴) ۲

☑ **تست:** در بازه‌ی (b, a) مقادیر سهمی $y = \frac{x^2}{2} + x - 4$ کوچکتر از $-\frac{5}{2}$ است. بیشترین مقدار $a - b$ کدام

است؟ (قلم چی)

۳ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

۴ (۱)

☑ **تست:** به ازای چند عدد طبیعی نامعادله‌ی $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$ برقرار است؟ (قلم چی)

۴ بی‌شمار

۳ دو

۲ یک

۱ هیچ

☑ **تست:** به ازای چه مقداری از m ، هیچ بخشی از سهمی $y = (3m - 2)x^2 + 2mx + 1$ پایین محور x ها قرار نمی‌گیرد؟ (گاج)

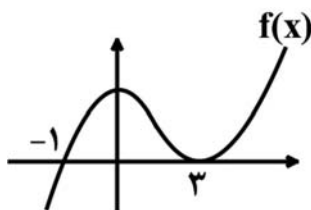
(۴) $(\frac{2}{3}, 2)$

(۳) $(\frac{2}{3}, 2]$

(۲) $(1, 2)$

(۱) $[1, 2]$

☑ **تست:** اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، آنگاه جواب نامعادله $\frac{x}{f(x)} < 0$ کدام است؟ (گاج)



(۱) $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$

(۲) $(-1, 3)$

(۳) $(-1, 0)$

(۴) $(0, +\infty)$

تست: مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ به کدام صورت است؟ (کنکور)

$$\frac{1}{2} < x < 3 \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} < x < 3 \quad (3)$$

$$x < 3 \quad (2)$$

$$x < \frac{1}{2} \quad (1)$$

تست: به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر m ، عبارت $\frac{(m-1)x^2 + (m-1)x + 1}{-x^2 + 3x - 4}$ همواره منفی است؟ (قلم چی)

$$m > -1 \quad (2)$$

$$m > 1 \quad (1)$$

$$-1 < m < 5 \quad (4)$$

$$1 < m < 5 \quad (3)$$

تست: اگر عبارت $q(x) = \frac{|x|+1}{2x^2+mx+n}$ فقط در فاصله‌ی $(3, +\infty) \cup (-\infty, -2)$ مثبت باشد، آنگاه $\frac{n}{m}$

کدام است؟ (گاج)

-۲ (۴)

۱۲ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)

فصل پنجم

تابع


□ فصل پنجم: تابع

◀ زوج مرتب:

ترتیب نوشتن اعداد در هر زوج مانند (a, b) مهم است، به همین دلیل به آنها زوج مرتب می‌گوییم. در هر زوج مرتب عضو اول را مولفه ی اول و عضو دوم را مولفه ی دوم می‌نامیم.

◀ تساوی زوج مرتب:

دو زوج مرتب را برابر گویند، هرگاه مولفه ی های آن‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند یعنی اگر $(x, y) = (a, b)$ آنگاه $x = a$ و $y = b$ است.

 **مثال:** مقادیر x و y را به دست آورید.

$$۱) (x - 2, y + 1) = (5, 3)$$

$$۲) (2x - y, y + 5) = (4, 7)$$

$$۳) (x - 2y, 3x + y) = (1, 10)$$

$$۴) (x^2 - y^2, 3xy) = (5, 18)$$

مثال: اگر دو زوج مرتب $(2x, y + 1)$ و $(3x, 2x - 1)$ نمایش یک نقطه باشند، $x + y$ را به دست



آورید.



تعریف تابع در زوج مرتب:

اگر یک رابطه به صورت مجموعه ی زوج مرتب داده شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه های اول یکسان نباشند یعنی اگر مولفه های اول برابر بودند، مولفه های دوم نیز برابر باشند.

$$f = \{(1, 2)(3, 4)(5, 6)\}$$

$$g = \{(1, 2)(3, 2)(5, 6)\}$$

$$h = \{(1, 2)(3, 4)(1, 6)\}$$

$$k = \{(1, 2)(3, 4)(1, 2)\}$$

$$g = \{(0, 1)\left(\frac{3}{5}, 1\right)(-5, 1)(8, 1)\}$$

(تمرین ص ۱۰۰ کتاب درسی)

$$k = \{(2, 5)\}$$

(تمرین ص ۱۰۰ کتاب درسی)

$$I = \{(1, 2)(2, 4)(3, 6), \dots\}$$

(تمرین ص ۱۰۰ کتاب درسی)

مثال: مقدار x را طوری به دست آورید که رابطه ی زیر یک تابع باشد. 

$$f = \{(1, 2)(3, 2x)(3, x - 7)\}$$



مثال: مقدار x را طوری به دست آورید که رابطه ی زیر یک تابع باشد.



$$f = \{(5, 6 - x)(x, 7)(5, x^2)(2, -1)\}$$

مثال: اگر رابطه ی $R = \{(4, 5)(a + 3, 3)(4, a^2 + 4)(2, b)\}$ تابع باشد، مقدار $a + b$ را به



دست آورید.



مثال: آیا جدول زیر یک تابع را نشان می دهد؟ چرا؟ (تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۴	۹	۱۵	۲۵	۳۶

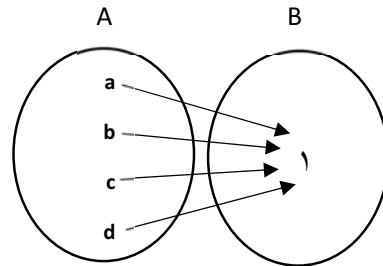
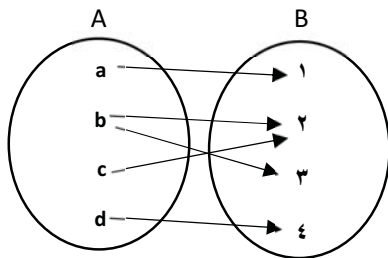
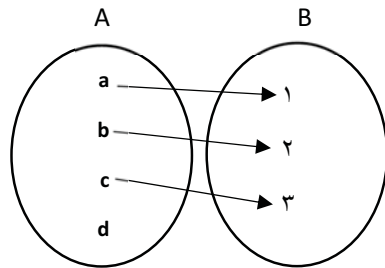
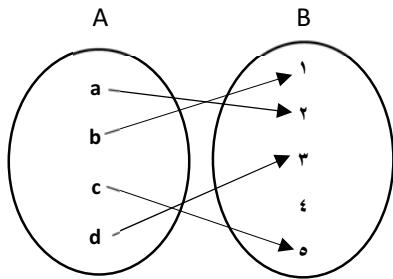
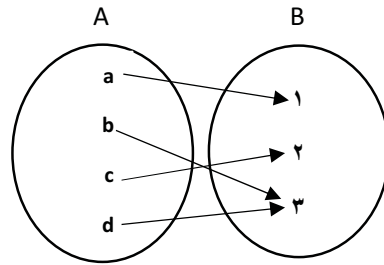
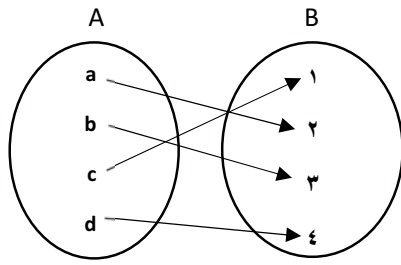
مثال: اگر درباره تابع g داشته باشیم: $g(4) = 3$, $g(-2) = \frac{1}{3}$, $g(1) = 5$, $g(0) = 2$ ؛ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. (تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)

تعریف تابع در نمودار ون:

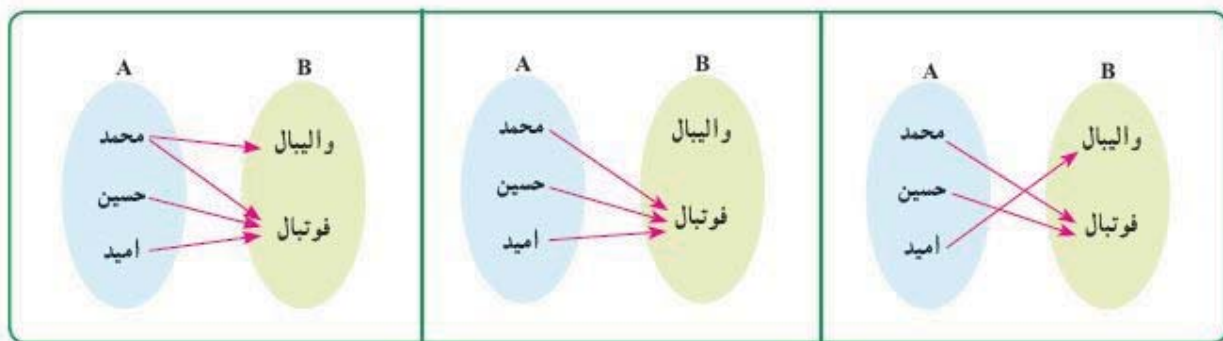
یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

نکته: نمودار پیکانی یک تابع دارای خواص زیر است:

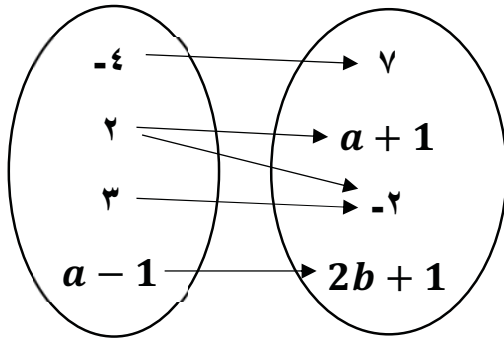
- از همه اعضای مجموعه ی اول باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.
- به اعضای مجموعه ی دوم ممکن است، یک پیکان یا بیشتر از یک پیکان نظیر شود یا اصلاً پیکانی نظیر نشود.



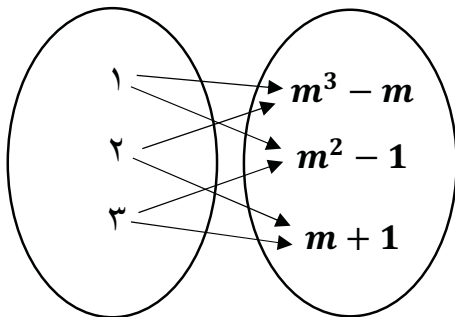
مثال: مجموعه A شامل سه دانش آموز به نام های محمد، حسین و امید و مجموعه B شامل دو رشته ورزشی است که دانش آموزان می توانند انتخاب کنند کدام یک از نمودارهای پیکانی داده شده تابع است و کدام یک تابع نیست؟ (کار در کلاس ص ۹۶ کتاب درسی)



مثال: اگر نمودار پیکانی مقابل، مربوط به یک تابع باشد، مقدار $a + b$ را به دست آورید.



مثال: اگر نمودار پیکانی روبرو یک تابع باشد، مقدار m را به دست آورید.



مثال: مجموعه های $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{2, 1\}$ داده شده اند. (تمرین ص ۱۰۰ کتاب درسی)

(الف) به کمک نمودار پیکانی دو رابطه از A به B ارائه کنید که تابع باشند.

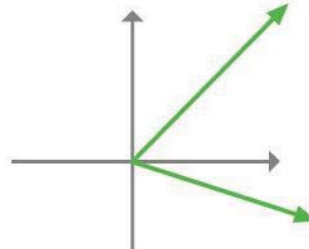
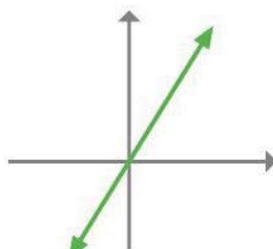
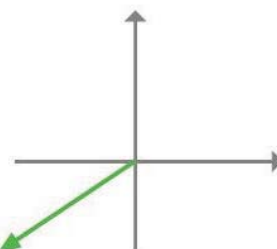
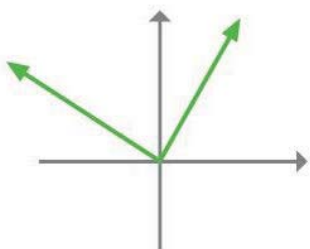
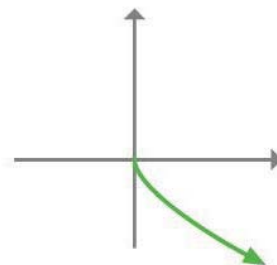
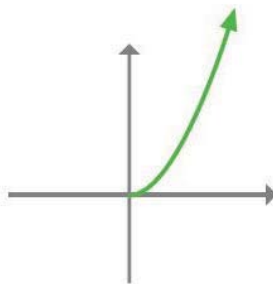
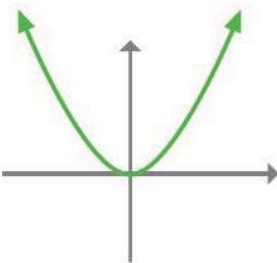
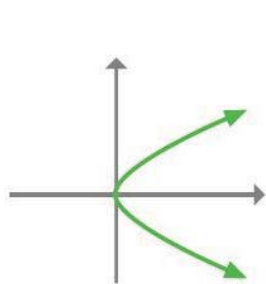
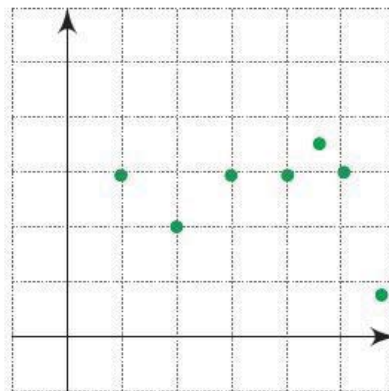
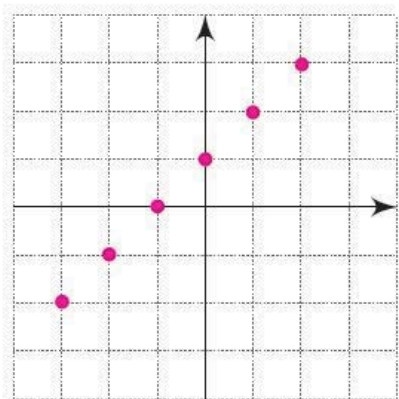
(ب) دو رابطه ارائه کنید که تابع نباشند.

(ج) چهار رابطه به دست آمده را به کمک زوج های مرتب و نمودار نمایش دهید.

تشخیص تابع بودن از روی نمودار:

اگر نمودار یک رابطه داده شده باشد، هنگامی این نمودار یک تابع است که هر خط موازی با محور عرض ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می دهند؟ (کار در کلاس ص ۱۰۹ کتاب درسی)





مثال: کدام یک از روابط زیر یک تابع را معلوم می کند؟ توضیح دهید. (تمرین ص ۱۰۰ کتاب درسی)

(الف) رابطه ای که به ضلع یک مربع، محیط مربع را نسبت می دهد.

(ب) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را در یک زمان معین نسبت می دهد.

(ج) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.

(د) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.

(هـ) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن عدد را نسبت می دهد.

(و) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

◀ نمایش جبری تابع (ضابطه ی تابع):

نمایش یک تابع برحسب یک عبارت جبری از یک متغیر را نمایش جبری یا ضابطه ی تابع می نامند. ضابطه ی یک

تابع را به شکل $y = f(x)$ نمایش می دهند.



مثال: طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. رابطه ای ریاضی بنویسید که محیط این

مستطیل را برحسب تابعی از عرض آن بیان کند. (تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)



مثال: یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع ۲ در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را برحسب تابعی از r بنویسید. (تمرین ص ۱۱۶ کتاب درسی)

تعیین دامنه و برد توابع در زوج مرتب:

مجموعه y همه y مولفه های اول زوج های مرتب تشکیل دهنده y هر تابع را دامنه و مجموعه x همه مولفه های دوم را برد آن تابع می نامند.

$$f = \{(1, 2)(3, 4)(5, 6)\}$$

$$g = \{(1, 2)(3, 2)(5, 2)\}$$

مثال: در تابع $f = \{(a, 2)(1, a + b)(2, 3)\}$ مجموعه y دامنه و برد تابع باهم برابرند. حاصل

$2a - 3b$ را به دست آورید.



مثال: رابطه ی $f = \{(0, -1)(b, 2a)(1, a - 2b)\}$ تابعی است که برد آن یک عضو دارد. حاصل



$a + b$ را بدست آورید.

مثال: اگر تابع با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داده شده باشد و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد،



برد تابع f را به دست آورید. (کار در کلاس ص ۱۰۲ کتاب درسی)



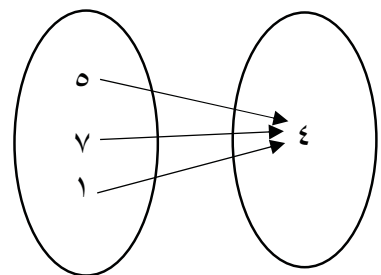
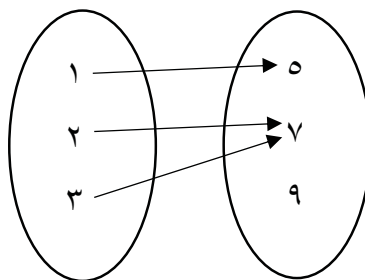
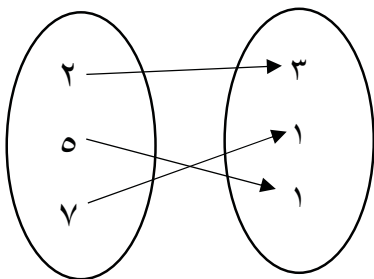
مثال: دامنه ی یک تابع $29 - 5n$ عضو و برد آن $3n + 7$ عضو دارد. چند عدد طبیعی برای n وجود

دارد؟

تعیین دامنه و برد توابع در نمودار ون:

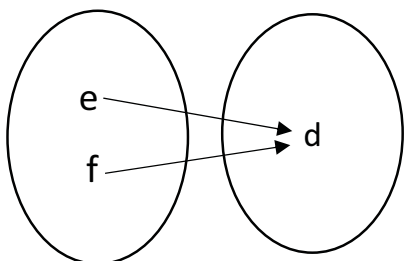
در نمودار پیکانی یک تابع مجموعه ی همه عضوهای مجموعه ی اول، دامنه ی تابع و مجموعه ی همه ی عضوهای از مجموعه ی دوم که پیکان به آن ها وارد شده، برد تابع است.

نکته: هم دامنه ی تابع را می توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.



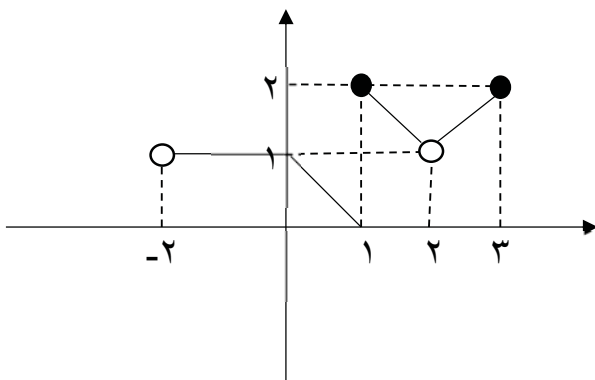
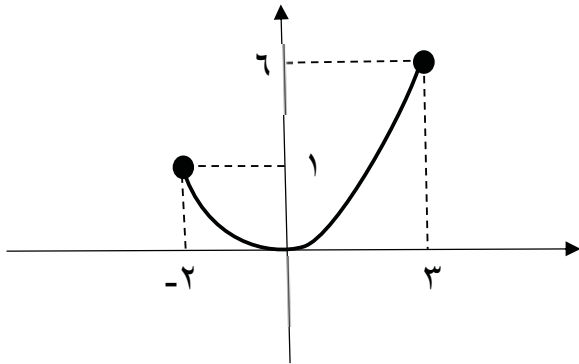
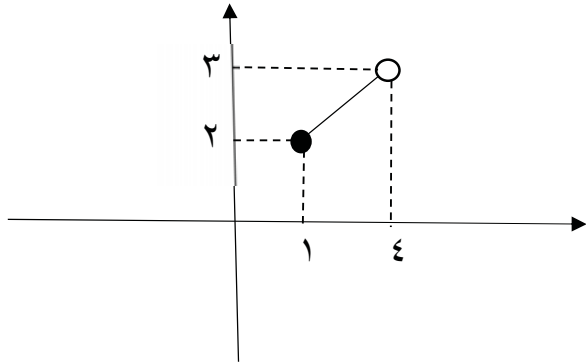
مثال: نمودار پیکانی تابع $R = \{(2a, 3c)(4a - 9c, 2b)(d^2 + 1, a)\}$ مطابق شکل زیر است.

حاصل $e + f$ را بدست آورید. (a مقداری حقیقی و مثبت است.)

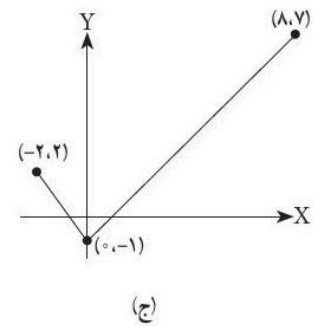
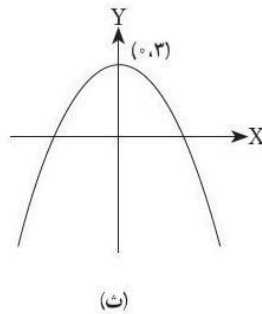
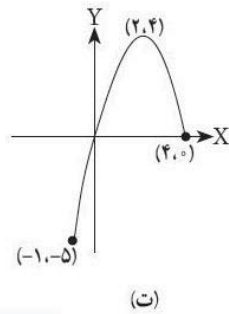
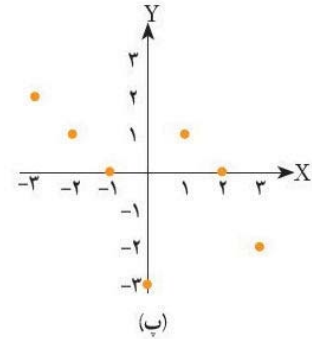
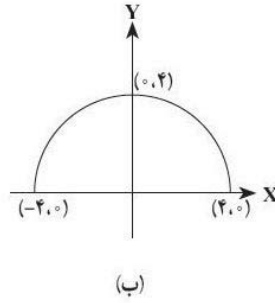
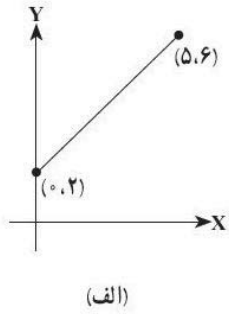


تعیین دامنه و برد توابع در نمودارها:

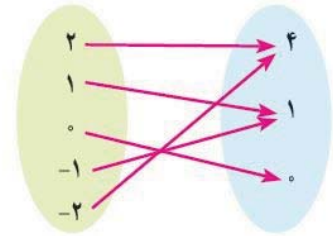
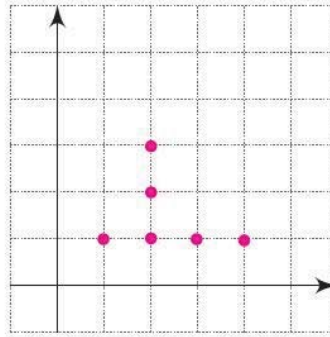
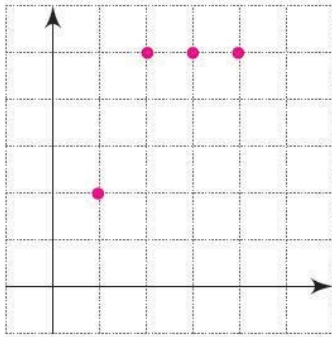
برای تعیین دامنه ی یک تابع ، وقتی نمودار آن داده شده ، کافی است تصویر نقاط تابع را روی محور x ها بباییم .
به طریق مشابه برای تعیین برد تابع ، کافی است تصویر نقاط تابع را روی محور y ها بباییم .



مثال: در شکل زیر نمودار تعدادی از توابع رسم شده اند. دامنه و برد هر یک از این توابع را به کمک نمودار آنها مشخص کنید. در هر مورد که امکان دارد، دامنه و برد را به صورت یک بازه نمایش دهید. نمایش جبری توابع (الف) و (ج) را بنویسید. (تمرین ص ۱۱۵ کتاب درسی)



مثال: کدام یک تابع است؟ دامنه و برد هر تابع را معلوم کنید. (تمرین ص ۱۰۵ کتاب درسی)



مثال: نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[1, 2]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع

می توان رسم کرد؟ (تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)

مقدار تابع در زوج مرتب:

مولفه ی دوم نظیر با مولفه ی اول داده شده را مقدار تابع می گوییم.

$$f = \{(1, 2)(2, 4)(5, 2)\}$$

مثال: در تابع $f = \{(2, 3)(3, 1)(4, 2)(1, 4)\}$ مقدار $2f(2) - f(4)$ را بدست آورید.

مثال: اگر رابطه ی $f = \{(-1, 1)(0, 1)(4, 2)(-1, a + 2)\}$ یک تابع باشد و داشته باشیم،

آنگاه مقدار k را بدست آورید. $\frac{a \cdot f(-1)}{k + 2f(0)}$

مثال: اگر $f = \{(1, 3)(3, 4)(5, 6)\}$ و $g = \{(2, 5)(6, 9)(7, 6)\}$ باشد، مقدار عبارات زیر را

بدست آورید.

1) $f(g(2))$

2) $g(f(5))$

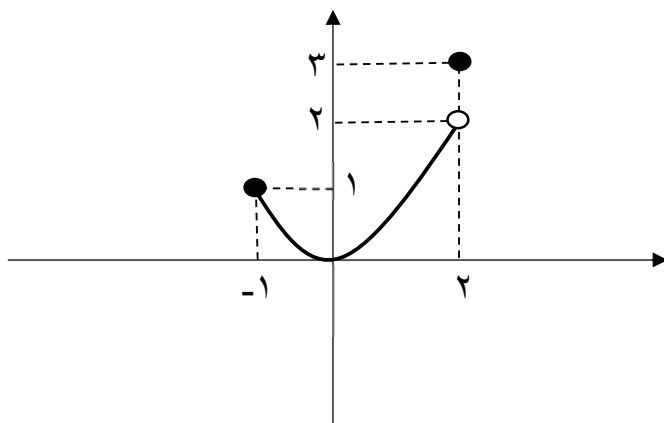
3) $f(f(1))$

4) $g(g(7))$

مثال: اگر $f = \{(-1, 3)(3, 1)(1, 2)(2, -1)\}$ و $f(f(a)) = 3$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

مقدار تابع در نمودار:

مقدار y ، به شرطی که توپر باشد را انتخاب می کنیم.




1) $f(-1)$

2) $f(0)$

3) $f(2)$

مقدار تابع در ضابطه:

برای یافتن مقدار تابع به ازای یک عدد از دامنه، کافی است آن عدد را به جای متغیر در ضابطه قرار دهیم.

مثال: در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ مقدار $f(2)$ و $f(-1)$ را بدست آورید. 

مثال: برای اندازه گیری دما از واحدهای سانتی گراد C و «فارنهایت» F استفاده می شود که با رابطه ی

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

(تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)

(الف) ۲۰- درجه سانتی گراد، چند درجه فارنهایت است؟

(ب) ۱۰۴ درجه فارنهایت چند سانتی گراد است؟

(پ) معادله ای بنویسید که سانتی گراد را برحسب فارنهایت به دست آورد.

(ث) آیا رابطه ی بین این دو واحد، یک تابع خطی را معلوم می کند؟

مثال: اگر $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ باشد مقدار $g\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ را بدست آورید.

مثال: دو تابع $f(x) = x - \sqrt{2x-1}$ و $g = \{(0,3)(5,1)(2,5)\}$ مفروض اند. $f(g(2))$ را بدست آورید.

مثال: هرگاه $f(5x-2) = x^2 + 1$ باشد، حاصل $\frac{f(8)-f(3)}{1+f(-7)}$ را بدست آورید.

مثال: اگر به ازای هر عدد طبیعی n ، $f(n+1) = \frac{2f(n)+1}{2}$ و $f(1) = 2$ آنگاه $f(101)$ را بدست آوردید.

◀ تابع ثابت :

تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد را تابع ثابت می نامند، ضابطه ی تابع ثابت $f(x) = c$ است.

نکته: نمودار تابع ثابت با دامنه ی R ، خط افقی $y = k$ است. اگر دامنه ی تابع R نباشد، نمودار تابع بخشی از این خط یا نقاطی روی آن است.

مثال:

الف) تابع $f(x) = -3$ را رسم کنید و مقادیر $f(2)$ ، $f(100)$ ، $f(-5)$ ، $f(\sqrt{5})$ و $f(-\frac{3}{4})$ را به دست آورید.

ب) نمودار این تابع را وقتی که دامنه آن بازه $[-2, 5]$ باشد نیز رسم کنید. (تمرین ص ۱۰۷ کتاب درسی)

نکته: در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، مولفه های دوم تمام زوج های مرتب متمایز، برابرند.

مثال: اگر $f = \{(-1, a + 4)(1, 3)(4, b^2 - 2b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a ، b را بدست

آورید.

مثال: اگر $f = \{(1, 2m)(2, m^2 - m)(3, m)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار m را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x) = (a + 1)x + 2a - 1$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{ax+4}{x+a}$ یک تابع ثابت باشد، مقادیر ممکن برای a را بدست آورید.

مثال: مقدار a چقدر باشد تا تابع $f(x) = \frac{3x+1}{ax+3}$ با دامنه ی $[1, 2]$ تابعی ثابت باشد؟

مثال: می دانیم f تابعی ثابت است، $af(x) = xf(x) + bx + 2$ و $g(x) = x + 1$ مقدار $g(ab)$ را بدست آورید.

تابع همانی:

اگر هر عضو از دامنه ی یک تابع، دقیقا به همان عضو از برد نظیر شود، تابع را " همانی " گویند. ضابطه ی تابع همانی $f(x) = x$ است.

نکته: نمودار تابع همانی با دامنه ی R خط $y = x$ (نیم ساز ناحیه ی اول و سوم) است. در صورتی که دامنه ی تابع R نباشد، نمودار بخشی از $y = x$ یا نقاطی بر روی آن است.

نکته: در نمایش زوج مرتبی یک تابع همانی، مولفه های اول و دوم هر زوج مرتب برابرند.

مثال: در تابع همانی $f = \{(5, b^2 + 4)(b, a - 1)(2, 2b)\}$ مقدار a ، b را بدست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{x^2 + ax + a + 1}{x + 1}$ تابعی همانی باشد، مقدار a را به دست آورید.

مثال: اگر $f(x) = \frac{2ax^4 - 4bx^3}{3x^3 + 2x^2}$ تابع همانی باشد، مقدار a و b را بدست آورید. $(x \neq 0, -\frac{2}{3})$

مثال: اگر f تابع همانی و g تابع ثابت باشد و داشته باشیم $\frac{3f(2)+g(3)}{2g(7)+f(1)} = \frac{10}{9}$ ، مقدار $g(0)$ را بدست

آورید.



مثال: اگر f تابع ثابت و g تابع همانی باشند و رابطه ی زیر برقرار باشد، $g(5) + f(5)$ را به دست

آورید.

$$(f(3))^2 + g(3) = 4f(4)$$

< تابع خطی:

هر تابعی که بتوان آن را به شکل $f(x) = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود.



مثال: برای یک تابع خطی می دانیم که: $f(2) = 11$ و $f(0) = 7$. نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید. (تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)





مثال: برای یک تابع خطی می دانیم که $f(1) = 5$ و $f(-7) = 21$ نمودار این تابع را رسم کنید و نمایش جبری آن را بنویسید.



مثال: نمودار یک تابع خطی از نقاط $(4, 3)$ و $(0, 3)$ می گذرد. $f(-4)$ و $f(-1)$ را به دست آورید.

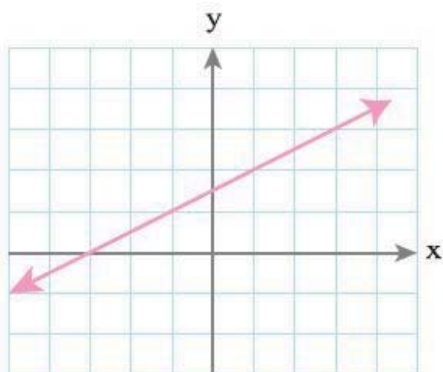
(تمرین ص ۱۱۷ کتاب درسی)



مثال: نمایش جبری تابع زیر را که نمودار آن ارائه شده است، به دست آورید. از بین نمایش های مختلف



که برای این تابع می دانید، کدام یک مناسب تر است؟ (تمرین ص ۱۰۷ کتاب درسی)



مثال: جدول زیر دمای سنگ ها در عمق های متفاوت زیر سطح زمین را نشان می دهد.



(تمرین ص ۱۰۷ کتاب درسی)

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به دست می دهد، نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله ای برای این تابع به دست آورید.

پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.



مثال: یک شمع ۲۰ سانتی متر ارتفاع دارد و در هر ساعت ۴ سانتی متر آن می سوزد. پس از چند ساعت شمع خاموش خواهد شد؟ جدولی تنظیم کنید و در ساعات مختلف ارتفاع شمع را محاسبه کنید.

(تمرین ص ۱۰۷ کتاب درسی)

x (زمان)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
Y (ارتفاع شمع)						

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) چرا این تابع، یک تابع خطی است؟

مثال: اگر $f(x) = 2x - 1$ و دامنه ی تابع f برابر مجموعه ی $\{-2, -1, 0, 1\}$ باشد، مجموعه ی برد این تابع را بدست آورید.

مثال: برد تابع خطی به معادله $f(x) = 3x - 5$ ، مجموعه $\{-2, 1, 4, 7\}$ است، مجموعه y دامنه y آن را بدست آورید.

مثال: اگر دامنه y تابع خطی $f(x) = -2x + 3$ بازه $(-2, 3)$ باشد، برد این تابع را بدست آورید.

مثال: برد تابع با ضابطه $f(x) = 1 - 3x$ برابر با $[-3, 1]$ است، دامنه y این تابع را بدست آورید.

مثال: نمایش جبری سه تابع خطی را بنویسید که دامنه آن بازه $[۵, -۳]$ باشد. چه تعداد از این گونه توابع وجود دارند؟ (تمرین ص ۱۰۷ کتاب درسی)

مثال: علی در هر دقیقه پیاده روی، مسافت $۰/۱$ کیلومتر را طی می کند، اگر مسافتی را که علی در t دقیقه طی می کند، با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

(تمرین ص ۱۰۸ کتاب درسی)

الف) $f(t) = t - 0.1$

ب) $f(t) = 0.1t$

پ) $f(t) = t + 0.1$

ت) $f(t) = 0.1 - t$



مثال: یک تابع خطی از نقطه ی (۳- و ۲) عبور می کند و در آن $f(3) = f(0) - 6$ می باشد، حاصل $f(1)$ را بدست آورید.

مثال: در تابع خطی $f(x) = ax + b$ داریم، $f(2) = 4$ و $f(x+3) = f(x) + 4$ ، مقدار $f(x)$ را بدست آورید.



مثال: اگر f تابع خطی باشد و داشته باشیم، $f(x+1) = f(x) + 3$ و $f(-3x) = -3f(x)$ ضابطه ی تابع f را بدست آورید.

مثال: در تابع خطی f رابطه ی $f(f(x)) = 4x + 3$ برقرار است. ضابطه ی f را مشخص کنید.



مثال: اگر نمودار دو تابع خطی $f(x) = (a - 1)x - b - 2$ و $g(x) = -ax + 2b$ یکدیگر را در نقطه ای به طول ۲ روی محور طول ها قطع کنند، $a + b$ را بدست آورید.

مثال: اگر $y = (a - 2)x^2 + ax + b + 3$ یک تابع خطی باشد که از مبدأ مختصات بگذرد، تابع خطی $f(x) = ax + b$ را مشخص کنید.





مثال: اگر تابع $f = \{(1, 2)(2, m + 1)(4, 2m)\}$ یک تابع خطی باشد، مقدار m را بدست آورید.



◀ تابع چند جمله ای :


توابعی که ضابطه ی آن ها، چند جمله ای های جبری از یک متغیر هستند را توابع چند جمله ای می نامند. دامنه ی این توابع اعداد حقیقی است.


مثال: اگر $f(x)$ تابعی باشد که $f(x) + xf(2) = x^2 + 1$ ، $f(1)$ را بدست آورید.




تابع چند ضابطه ای :


تابعی که در بخش های مختلف از دامنه ی آن، با ضابطه های مختلف تعریف می شود را تابع چند ضابطه ای می نامند.


مثال: در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ -5x & x < 1 \end{cases}$ مقادیر $f(\sqrt{2})$ ، $f(-1)$ را بیابید. 

مثال: در تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x + 4} & x > 3 \\ 2x + 3 & x < 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(1))$ را بدست آورید. 

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$ باشد، $f(-f(x))$ را بدست آورید. 

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ ، حاصل $f(f(\sin^2 x))$ را بدست آورید. ($\cos x \neq 0$) 

نکته: در توابع چند ضابطه ای، اشتراک دامنه ها، تهی است. دامنه ی تابع، اجتماع دامنه ی ضابطه ها و برد تابع، اجتماع برد ضابطه ها است. 

مثال: به ازای چه مقداری برای a ، رابطه ی $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 3 \\ a-x & x \leq 3 \end{cases}$ بیانگر یک تابع است؟ 

مثال: اگر $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & x \leq 2 \\ 2x & x \geq 2 \end{cases}$ تابع باشد، در تابع $g(x) = ax^2 + \frac{b}{2}x - 5$ حاصل

$g(2)$ را بدست آورید.

مثال: کدام یک از رابطه های زیر یک تابع را نمایش می دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

(تمرین ص ۱۱۷ کتاب درسی)

الف) $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x+2 & x \leq 2 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

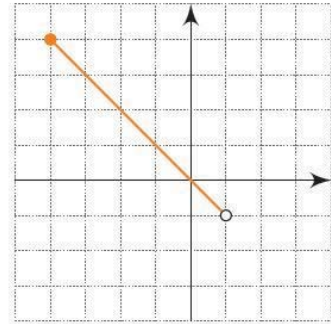
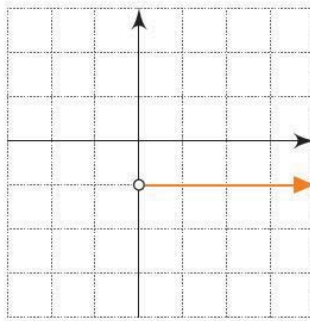
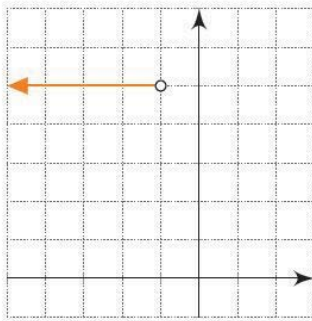
مثال: توابع f ، g ، h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد هر تابع را نیز مشخص کنید. (فعالیت ص ۱۱۲ کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ -x & -4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$



مقادیر $g(0)$ ، $h(\sqrt{5})$ ، $f\left(\frac{-1}{5}\right)$ ، $g(-2)$ ، $f(3)$ را بیابید.

مثال: نمودار تابع های زیر را رسم و دامنه و برد آنها را مشخص کنید. 

(کار در کلاس ص ۱۱۳ کتاب درسی)

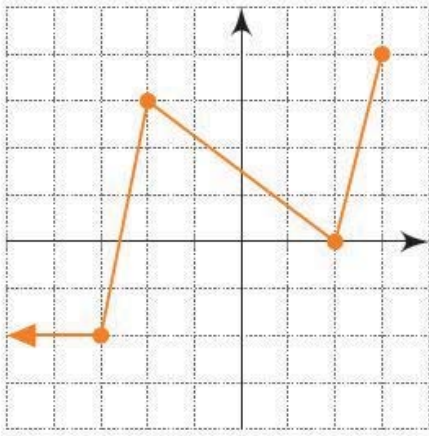
$$g(x) = \begin{cases} 2x-5 & x > 2 \\ 1 & -3 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{2} & x \leq -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 3x+1 & x \leq 0 \end{cases}$$

مقادیر $f(0)$ ، $f(-2)$ ، $g\left(\frac{-1}{5}\right)$ ، $g(2)$ و $g(0)$ را به دست آورید.

مثال: نمودار تابع f داده شده است. ضابطه این تابع را بنویسید و مقادیر خواسته شده را حساب کنید.

(تمرین ص ۱۱۷ کتاب درسی)



$$f(\sqrt{5})$$

$$f(6)$$

$$f(3)$$

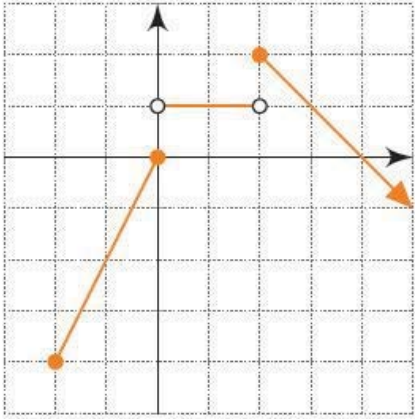
$$f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f(0)$$

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)$$

مثال: نمودار تابع قطعه ای f داده شده است. ضابطه، دامنه و برد این تابع را به دست آورید.

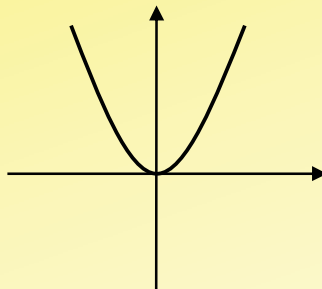
(کار در کلاس ص ۱۱۳ کتاب درسی)



تابع درجه دوم:

توابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را تابع درجه دوم می نامند. دامنه ی این توابع اعداد حقیقی هستند.

نکته: حالت خاص تابع درجه دوم به صورت $y = x^2$ است. نمودار این تابع به صورت زیر است.



مثال: نقطه ی تلاقی نمودار تابع $y = x^2 - x - 4$ ، با نیم ساز ناحیه ی دوم را بدست آورید.

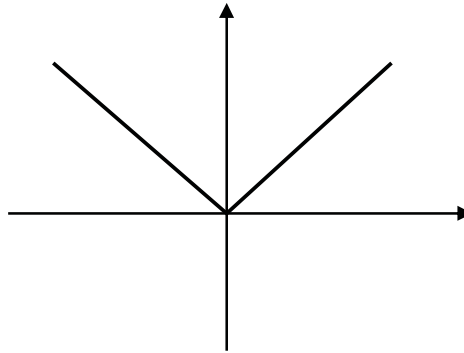
مثال: نمودار تابعی، یک سهمی است که از نقاط $(1, -2)$ و $(2, -3)$ می گذرد و محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند. نمایش جبری این تابع را بیابید و نمودار آن را رسم و دامنه و برد تابع را مشخص کنید.


(تمرین ص ۱۱۷ کتاب درسی)


تابع قدر مطلق:

تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدر مطلق آن در برد نظیر می کند، تابع قدر مطلق می نامند. تابع قدر مطلق را با ضابطه ی $f(x) = |x|$ نمایش می دهند.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



مثال: اگر $f(x) = |x|$ باشد، آن گاه $f(1 - \sqrt{2})$ را بدست آورید. 

مثال: وقتی $1 < x < 3$ باشد، ضابطه ی تابع $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$ را به صورت یک تابع 

ثابت بنویسید.



مثال: اگر $-1 \leq x \leq 1$ باشد، نمودار تابع $f(x) = |2x + 2| - |x - 1| - 3x$ را رسم کرده و سپس برد تابع را مشخص کنید.

مثال: تابع $f(x) = |6 - 2x|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.

مثال: تابع $f(x) = |2x - 4| - |x + 3|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید.



انتقال های عمودی و افقی :

۱- برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در راستای قائم به سمت بالا انتقال دهیم و برای $k < 0$ این انتقال به سمت پائین انجام می شود.

۲- برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، اگر $k > 0$ باشد، کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال دهیم و برای $k < 0$ ، این انتقال به اندازه $|k|$ واحد به سمت راست انجام می شود.

انبساط و انقباض عمودی :

۱- برای رسم نمودار تابع $y = kf(x)$ ، کافی است عرض نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در k ضرب کنیم. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از انقباض عمودی نمودار $y = f(x)$ بدست می آید.

۲- نمودار تابع $y = -f(x)$ قرینه $y = f(x)$ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x است.

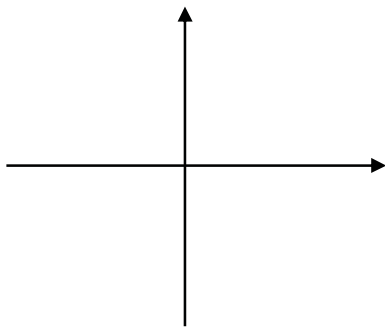
انبساط و انقباض افقی :

۱- برای رسم نمودار تابع $y = f(kx)$ ، کافی است طول نقاط نمودار تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{k}$ ضرب کنیم. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انقباض افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها بدست می آید. و اگر $0 < k < 1$ باشد، این نمودار از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می شود.

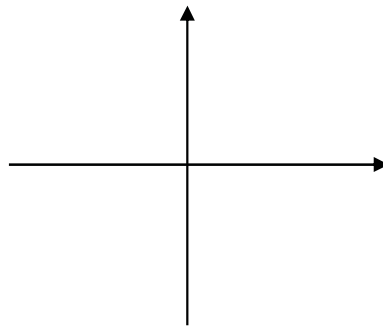
۲- نمودار تابع $y = f(-x)$ قرینه $y = f(x)$ نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به محور y است.

مثال: توابع زیر را رسم کنید.

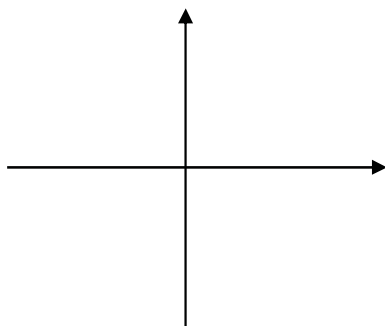
1) $y = x^2$



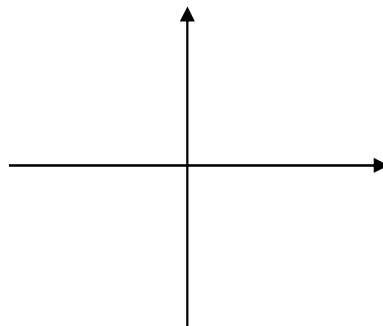
2) $y = -x^2$



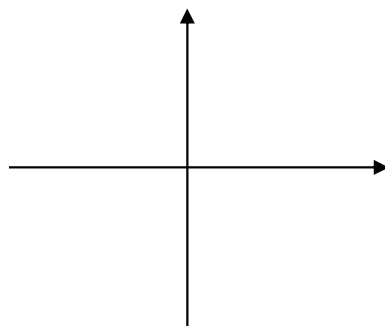
3) $y = (-x)^2$



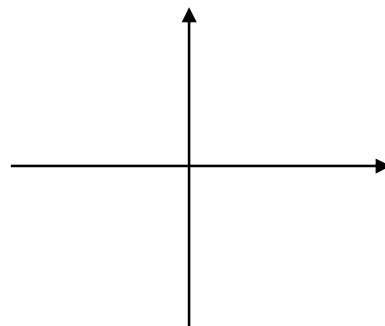
4) $y = (x + 3)^2$



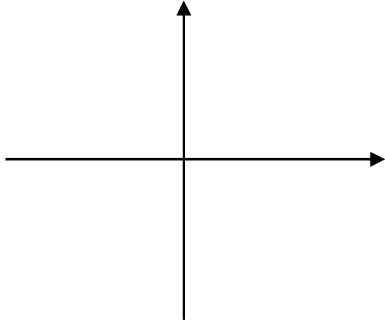
5) $y = (x - 3)^2$



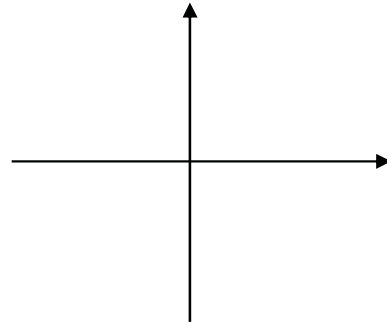
6) $y = x^2 + 3$



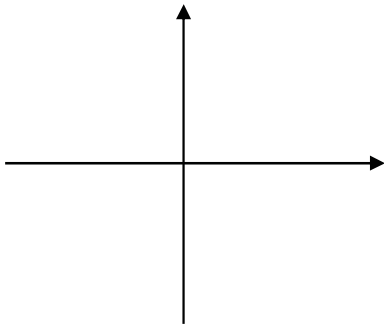
7) $y = x^2 - 3$



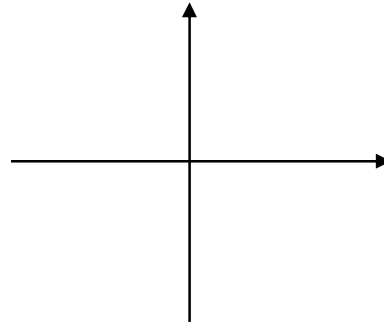
8) $y = 5x^2$



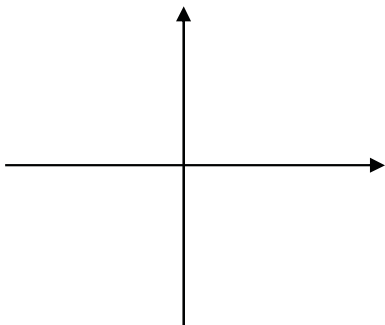
9) $y = \frac{1}{3}x^2$



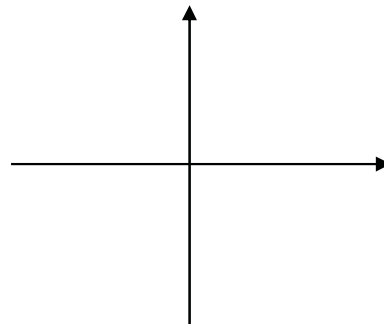
10) $y = (4 - x)^2$



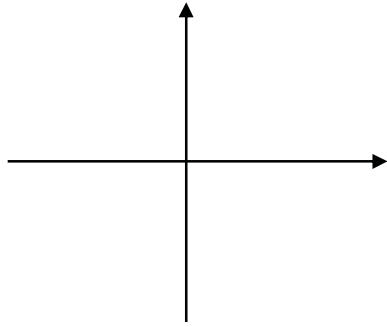
11) $y = (2x - 6)^2$



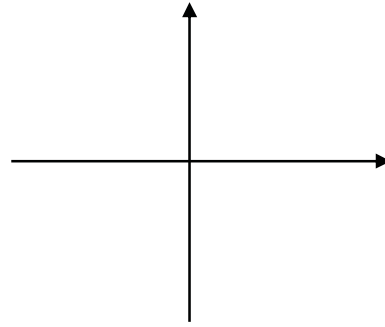
12) $y = -3(x + 1)^2 - 5$



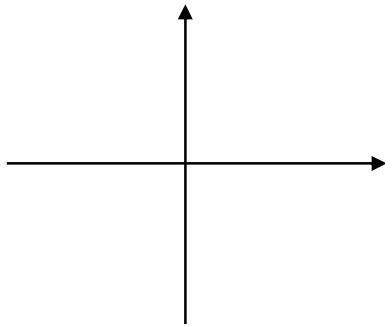
13) $y = |x|$



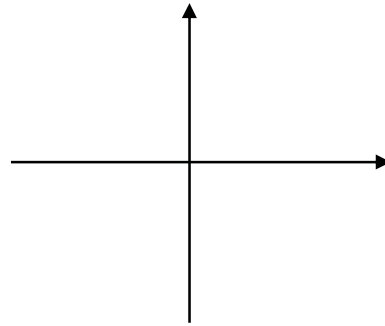
14) $y = -|x|$



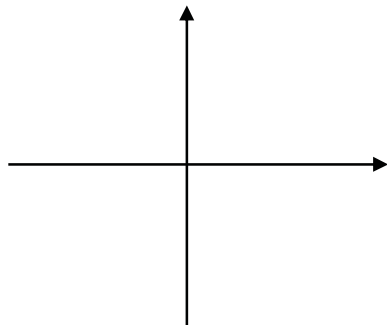
15) $y = |-x|$



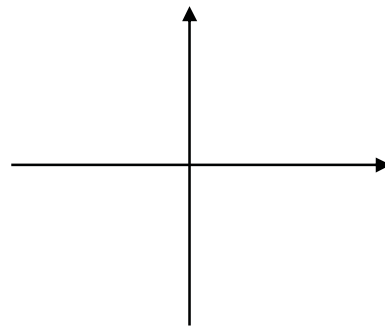
16) $|x + 5|$



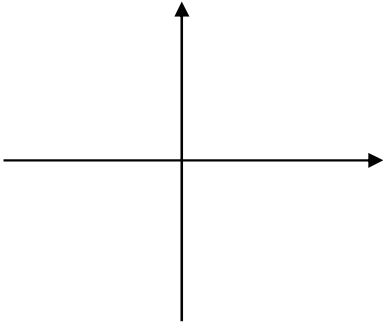
17) $y = |x| + 5$



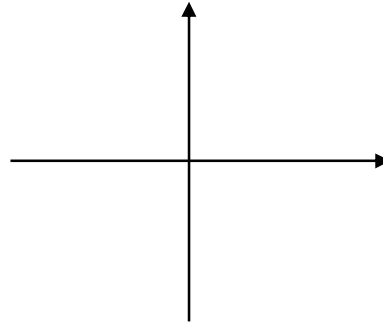
18) $y = 3|x|$



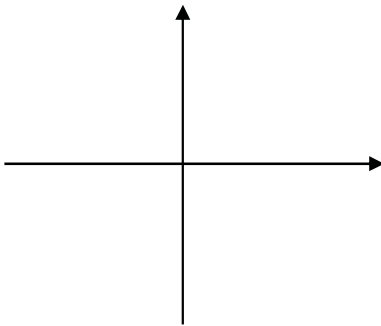
19) $y = \frac{1}{3} |x|$



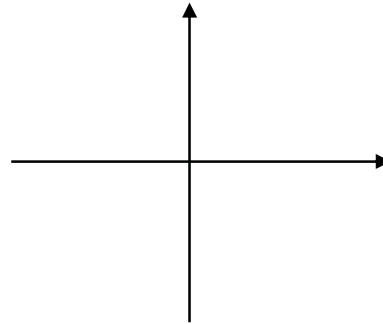
20) $y = |4 - x|$



21) $y = |6 - 2x|$



22) $y = 2|x - 3| - 7$



مثال: هر یک از نمودارهای زیر کدام یک از تابع های (الف) تا (ر) را نمایش می دهد؟ دامنه و برد این



توابع چیست؟ (تمرین ص ۱۱۶ کتاب درسی)

الف) $y = x^2 - 3$

ب) $y = -x^2 + 2$

پ) $y = |x|$

ت) $y = -|x|$

ث) $y = (x + 2)^2$

ج) $y = |x| + \frac{1}{2}$

چ) $y = |x - 2|$

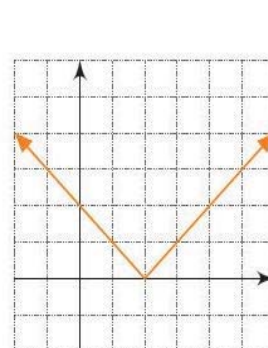
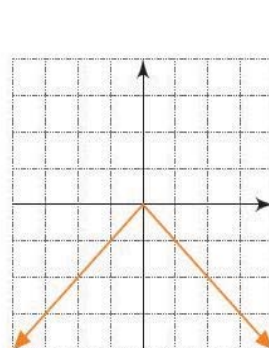
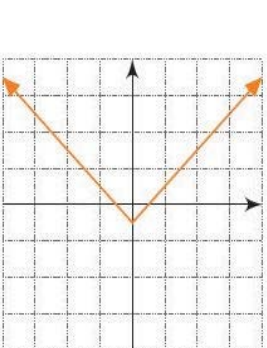
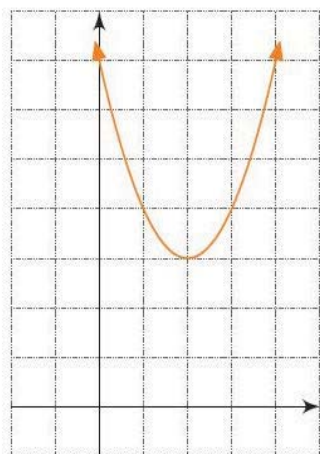
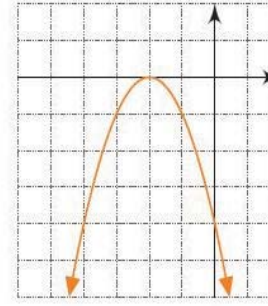
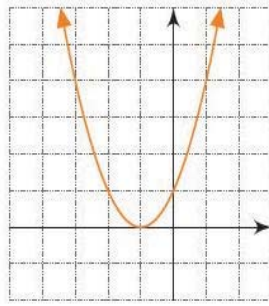
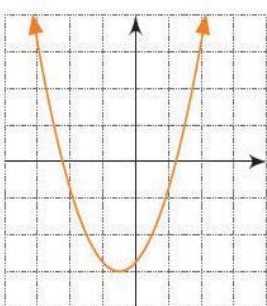
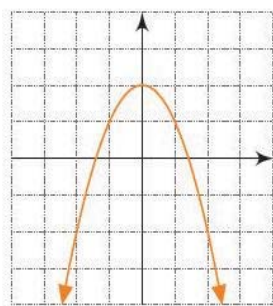
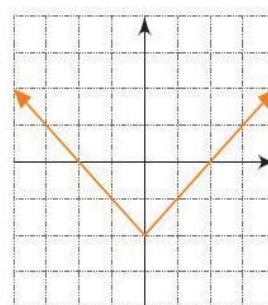
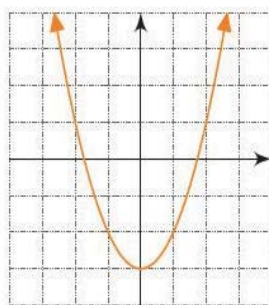
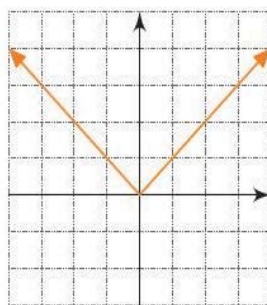
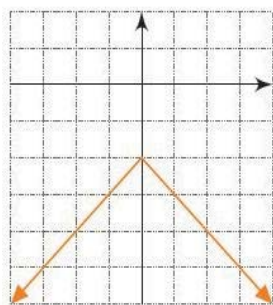
ح) $y = -(x + 2)^2$

خ) $y = -|x| - 2$

د) $y = (x + 2)^2 + 3$

ذ) $y = |x| - 2$

ر) $y = (x + \frac{1}{2})^2 - 3$



مثال: در شکل های زیر نمودار توابع درجه دوم f ، g ، h و t رسم شده اند.

(کار در کلاس ص ۱۱۵ کتاب درسی)

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

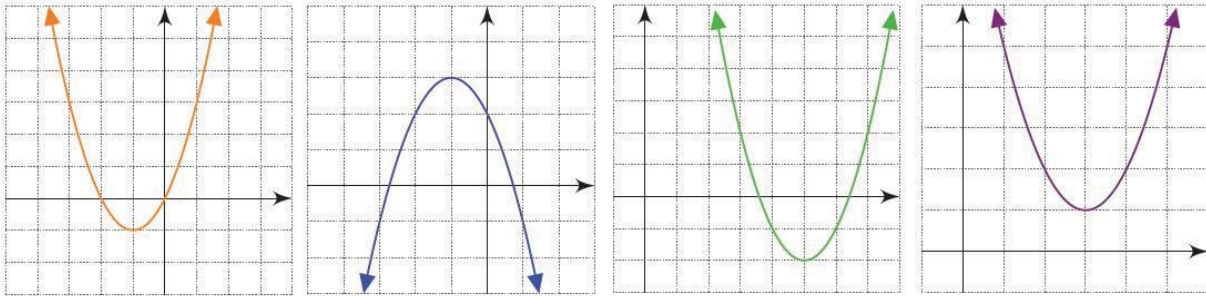
$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را بدست آورید.



فصل ششم

شمارش بدون شمردن



□ فصل ششم: شمارش بدون شمردن

◀ فاکتوریل :

اگر n عددی طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از یک تا n را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

نکته: طبق قرارداد، $0! = 1$ است.



نکته: اعمال جبری به صورت مستقیم در فاکتوریل انجام نمی‌شود.



مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟ (تمرین ص ۱۳۱ کتاب درسی)



$$6! = 3! + 3!$$

$$6! = 6 \times 5!$$

$$8! = 4! \times 2!$$

$$6! = 2 \times 3!$$

$$(3!)^2 = 9!$$

$$4! = \frac{8!}{2!}$$





مثال: حاصل ضرب های زیر را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.



(کار در کلاس ص ۱۲۹ کتاب درسی)

الف) 9×8

ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6$

پ) $11 \times 10 \times 9$

ت) 8


ث) $n(n-1)$


ج) $n(n-1)(n-2)(n-3)$


مثال: مقدار عبارت $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$ را بدست آورید.






مثال: از معادله $\frac{n!}{(n-2)!} = 110$ ، مقدار n را بدست آورید. 


مثال: از تساوی $\frac{(n-1)!}{(3)!} = 120$ ، مقدار n را بدست آورید. 


مثال: اگر $n! = 120 \times 42$ باشد، مقدار n را بدست آورید. 






مثال: اگر $\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{6}$ باشد، مقدار n را بدست آورید. 

مثال: اگر $(n+2)! = 56n!$ باشد، حاصل $(n-1)!$ را بدست آورید. 

مثال: اگر $n! = \frac{9(9!+8!)}{(0!+3)!}$ باشد، مقدار n را بدست آورید. 



مثال: اگر $1 = (n^2 - 9)!$ باشد، مقدار n را بدست آورید. 

تست: کدام تساوی درست است؟ (سنجش)

۱) $\frac{9!}{7!} = 72$

۲) $\frac{5!}{0!} = \infty$

۳) $\frac{18!}{3!} = 6!$

۴) $15! + 3! = 18!$

تست: حاصل $\frac{15! + 14!}{14!}$ کدام است؟ (گاج)

۱۷(۴)

۱۶(۳)

۱۴(۲)

۱۰(۱)



☑ تست: ساده شده ی عبارت $\frac{11 \times (12! + 11!)}{12! - 11!}$ کدام است؟ (گزینه ۲)

۱۱ × ۱۳! (۴)

۱۱ × ۱۳ (۳)

۱۱ (۲)

۱۳ (۱)

☑ تست: حاصل $\frac{(2n)!}{(2(n-1))!} = 56$ باشد، کدام n است؟ (گاج)

۸ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۶ (۱)



☑ **تست:** اگر $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$ ، آنگاه n کدام است؟ (سنجش)

۴) نشدنی

۳) ۹

۲) ۸

۱) ۷

☑ **تست:** اگر $(n^2 - 3n)! = 24$ آنگاه $(n + 2)!$ کدام است؟ ($n \in \mathbb{N}$) (گزینه ۲)

۴) ۷۲۰

۳) ۱۲۰

۲) ۲۴

۱) ۶

◀ اصل جمع :

اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد بطوریکه برای روش اول a انتخاب و برای روش دوم b انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام آن کار $a + b$ روش وجود دارد.

◀ اصل ضرب :

اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد بطوریکه برای انجام مرحله ی اول a انتخاب و برای هر کدام از این a انتخاب، مرحله ی دوم b انتخاب وجود داشته باشد، آن کار به $a \times b$ روش قابل انجام است.

نکته: در مسائل مربوط به ترکیبات لفظ " و " نشان دهنده ی اصل ضرب و لفظ " یا " نشان دهنده ی اصل جمع می باشد.

مثال: پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: مریم، گلایل، زنبق و رز. شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارتند از: گردویی، نارگیلی، کشمش. او چند انتخاب دارد؟

هفته بعد، پژمان می خواهد به دیدن خانه جدید یکی از دوستانش برود. او این بار می خواهد «یک شاخه گل» و «یک نوع شیرینی» بخرد و همان گزینه ها را در ذهن دارد. او این بار به چند حالت می تواند خرید کند؟

(کار در کلاس صفحه ۱۲۱ کتاب درسی)



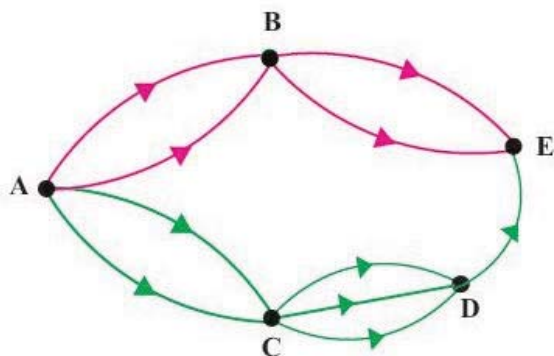
مثال: راننده ای برای رفتن از مکان A به مکان B میتواند از ۳ راه اصلی یا ۲ راه میان بر استفاده کند .

این راننده به چند طریق میتواند از مکان A به مکان B برود ؟

مثال: فردی می خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار، قصد دارد، از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر a و b و از قم به اصفهان سه مسیر ۱ و ۲ و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان سفر کند؟ (مثال صفحه ۱۲۰ کتاب درسی)

مثال: اگر شکل مقابل، نشان دهنده جاده های بین شهرهای A و B و C و D و E باشد و همه جاده ها

یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟ (تمرین صفحه ۱۲۶ کتاب درسی)





مثال: علی سه پیراهن، چهار شلوار، دو جفت کفش دارد. او چند حالت مختلف می تواند این لباس ها

را برتن کند؟

مثال: می خواهیم راس های مثلث زیر را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ کنیم.

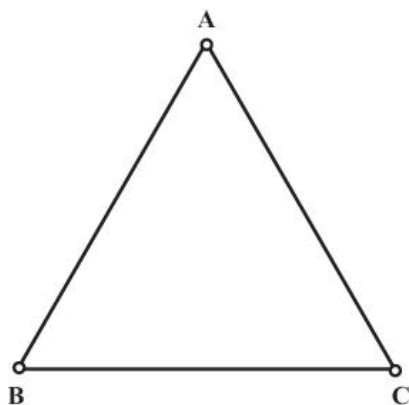
(الف) به چند طریق این کار امکان پذیر است؟

(ب) به چند طریق می توان این رنگ آمیزی را انجام داد، به گونه ای که راس هایی که به هم وصل اند، هم رنگ

نباشند.

(پ) هر دو قسمت (الف) و (ب) را در حالتی که از سه رنگ مختلف استفاده می کنیم؛ بررسی کنید.

(تمرین صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)





مثال: در یک کشور، نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود. (تمرین صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)

الف) چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود

ب) اگر یکی از رنگ های تولید شده، مشکی باشد، چند نوع از این اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

پ) چند نوع از این اتومبیل مشکی دنده اتوماتیک تولید می شود؟



مثال: با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن ها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟ (تمرین صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)

$$A = \{۱۱ \text{ و } ۲۲ \text{ و } \dots \text{ و } ۹۹\}$$

$$B = \{۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶ \text{ و } ۷ \text{ و } ۸ \text{ و } ۹\}$$

$$C = \{ب، ج، د، س، ص، ط، ق، ل، م، ن، و، ه، ی\}$$





مثال: در یک شهرک صنعتی، ۵ بلوار اصلی و در هر بلوار، بین ۸ تا ۱۰ خیابان و در هر خیابان، بین ۱۰ تا ۱۲ کوچه و در هر کوچه بین ۲۰ تا ۳۰ کارخانه وجود دارد. حداقل و حداکثر تعداد کارخانه هایی که ممکن است در این شهرک وجود داشته باشد، چند تاست؟ (تمرین صفحه ۱۲۵ کتاب درسی)

مثال: یک آزمون چند گزینه ای شامل: ۱۰ سوال ۴ گزینه ای و ۵ سوال ۲ گزینه ای (بله-خیر) است. فردی، قصد دارد به سوال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر: (الف) اگر مجبور باشد به همه سوال ها جواب دهد؟ (ب) بتواند سوال ها را بدون جواب هم بگذارد؟ (تمرین صفحه ۱۲۶ کتاب درسی)





مثال: از مجموعه ی $A = \{1, 2, 3\}$ به مجموعه ی $B = \{a, b, c, d\}$ چند تابع می توان نوشت؟ 

تست: برای مسافرت از شهری به شهر دیگر ۵ نوع وسیله ی نقلیه موجود است. تعداد صورت هایی که می توان از شهر A به شهر B با عبور از دو شهر متوالی C و D رفت بطوریکه از هر نوع وسیله ی نقلیه حداکثر یک بار استفاده شده باشد، کدام است؟ (کنکور)

(۱) ۶۰

(۲) ۸۰

(۳) ۹۰

(۴) ۱۲۵



☑ **تست:** در یک امتحان چهار گزینه ای با ده سوال متفاوت اگر همه ی دانش آموزان به همه ی سوال ها پاسخ دهند چند پاسخ نامه ی متفاوت می توانیم داشته باشیم؟ (تعداد دانش آموزان از تعداد حالات بیشتر است.)

(کنکور)

- (۱) 10^4
 (۲) 2^{10}
 (۳) 4^{10}
 (۴) 40^{40}

☑ **تست:** در یک کشور نوعی اتومبیل در ۳ مدل ۵ رنگ و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود . چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟ (گزینه ی ۲)

- (۱) ۱۰
 (۲) ۲۰
 (۳) ۳۰
 (۴) ۴۰

☑ **تست:** به چند طریق میتوان طبقات مختلف یک ساختمان ۵ طبقه را با چهار رنگ سفید، قرمز، زرد و سبز رنگ کرد به شرطی که رنگ طبقات مجاور، متمایز باشد؟ (گزینه ی ۲)

- (۱) $4!$
 (۲) 4^5
 (۳) 4×3^4
 (۴) 5^4

☑ **تست:** به چند طریق می توان به ۱۰ سوال ۴ گزینه ای پاسخ داد به طوریکه حتماً به ۵ سوال اول پاسخ داده شود؟ (گاج)

- (۱) 20^5
 (۲) 5^5
 (۳) 5^{10}
 (۴) 4^{10}

☑ **تست:** چه تعداد از زیر مجموعه های مجموعه ی $\{a, b, c, d, e\}$ دارای ۲ عضو a و b هستند؟

(گزینه ی ۲)

- (۱) ۸
 (۲) ۲
 (۳) ۱۶
 (۴) ۴

☑ **تست:** اگر شکل مقابل نشان دهنده ی جاده های بین شهرهای A ، B ، C ، D و E باشند و همه ی جاده ها یک طرفه باشند ، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت ، اگر بخواهیم حتماً از شهر B عبور کنیم ؟

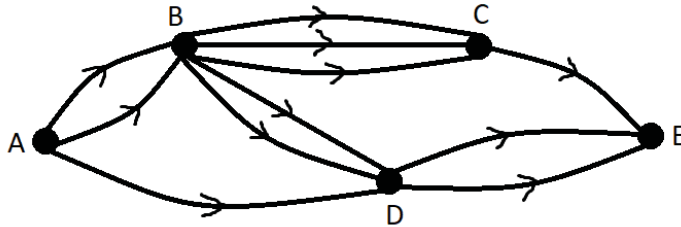
(گزینه ی ۲)

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۱ (۲)

۱۶ (۱)



☑ **تست:** ۲۰ مسافر داخل مترو، به چند طریق می توانند در ۷ ایستگاه از قطار پیاده شوند؟ (گزینه ی ۲)

P(۲۰ و ۷) (۲)

۲۰^۷ (۱) $\frac{20!}{7!}$ (۴)۷^{۲۰} (۳)


◀ جایگشت:

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها کنار هم یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوئیم.

◀ ترتیب:


تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز یا به عبارت دیگر تعداد راه‌های چیدن r شیء از n شیء متمایز که ترتیب چیدن نشدن در آن اهمیت دارد را با نماد $P(n, r)$ نشان می‌دهیم و داریم:


$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید. 

$$P(n+2, 2) = 12$$




مثال: اگر $P(n, n-2) = 60$ باشد، $P(n, 2)$ را بدست آورید. 


مثال: معادله‌ی زیر را حل کنید. 


$$P(n, 4) = 12P(n, 2)$$






مثال: اگر $P(n, 3) = 9P(n-1, 2)$ آنگاه $P(n, 4)$ را بدست آورید. 


مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ 


مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج می توان ساخت؟ 






مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد می توان ساخت؟ 

مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۰ چند عدد سه رقمی می توان ساخت؟ 

مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۰ چند عدد سه رقمی فرد می توان ساخت؟ 

مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۰ چند عدد سه رقمی زوج می توان ساخت؟ 





(مثال صفحه ۱۲۳ کتاب درسی)


مثال: با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و ۰ 

الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی را با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟


ت) چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟


مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟ 


مثال: با اعداد ۷ و ۶ و ۵ و ۵ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟ 






مثال: با اعداد ۶ و ۶ و ۵ و ۵ و ۵ چند عدد ۵ رقمی می توان ساخت؟ 


مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۸۰۰ می توان ساخت؟ 


مثال: با اعداد ۹ و ۸ و ۷ و ۴ و ۳ چند عدد سه رقمی کوچکتر از ۷۵۰ می توان ساخت؟ 





مثال: با حروف کلمه "شکوفه" چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان ساخت؟ 

مثال: با حروف کلمه "شکوفه" چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان ساخت؟ 

مثال: با حروف کلمه "اصفهان" چند کلمه‌ی ۶ حرفی می‌توان ساخت؟ 

مثال: با حروف کلمه "دامداران" چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت؟ 





مثال: رمزی از سه حرف تشکیل شده است، که هر کدام می توانند از حروف فارسی یا حروف کوچک



انگلیسی باشند. اگر حروف کنار هم از یک زبان نباشند، برای این رمز، چند حالت ممکن وجود دارد؟

(مثال صفحه ۱۲۲ کتاب درسی)

مثال: با حروف کلمه "جمهوری" به چند طریق می توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت،



بطوریکه حرف اول آن‌ها نقطه‌دار نباشد؟





مثال: با جابجایی حروف کلمه "NADER" چند کلمه‌ی پنج حرفی بدون توجه به مفهوم آن می‌توان ساخت بطوریکه همواره حرف D در وسط قرار گیرد؟

مثال: در چند جایگشت پنج حرفی از حروف کلمه‌ی "CLEAR" حروف C و R کنار هم قرار دارند؟

مثال: حروف کلمه‌ی ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرارداد بطوریکه Sها یک در میان باشد؟





(مثال ص ۱۳۰ کتاب درسی)

مثال: با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:



الف) چند کلمه ی ۸ حرفی می توان نوشت؟ چندتا از آنها به «ی» ختم می شود؟

ب) چند کلمه ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف «د» و «ی» کنار هم قرار داشته باشند؟

پ) چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت؟ چندتا از آنها به «گردی» ختم می شوند؟

ت) چند کلمه ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ی «جهان» چهار حرف اول باشند؟

ث) چند کلمه ی ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه ی «جهان» کنار هم باشند؟

ج) چند کلمه ی ۸ حرفی می توان نوشت که با حرف نقطه دار شروع شوند؟





(تمرین ص ۱۳۲ کتاب درسی)

مثال: با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف 

الف) چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت؟ چندتا از آنها با «گل» شروع می شود؟

ب) چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشت؟

پ) چند کلمه ی ۶ حرفی می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ت) چند کلمه ی ۴ حرفی می توان نوشته که در آنها دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

ث) چند کلمه ی ۵ حرفی می توان نوشته که در آنها حروف کلمه ی «پیرا» کنار هم آمده باشند؟





مثال: تعداد حالت های ممکن برای رمز یک دستگاه را در حالت های زیر به دست آورید.



(تمرین صفحه ۱۲۴ کتاب درسی)

الف) این رمز از یک گزینه تشکیل شده، که یک عدد یا یک حرف الفبای فارسی است.

ب) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که گزینه ی اول یک عدد و گزینه ی دوم یک حرف الفبای فارسی است.

پ) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است که یکی از گزینه ها یک عدد و گزینه دیگر، یک حرف الفبای فارسی است.

ت) این رمز از دو گزینه تشکیل شده است، که یا هر دو گزینه عددند یا هر دو گزینه حروف انگلیسی اند.

ث) این رمز از چهار گزینه تشکیل شده است، که دو گزینه اول اعداد غیر تکراری و دو گزینه دوم، حروف انگلیسی غیر تکراری اند.





مثال: ۵ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

مثال: ۵ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، بطوریکه کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

مثال: ۵ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، بطوریکه کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟





مثال: ۵ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، بطوریکه کتاب‌ها یکی در میان قرار گرفته باشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

مثال: ۵ کتاب ریاضی متمایز و ۵ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، بطوریکه کتاب‌ها یکی در میان قرار گرفته باشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

مثال: ۵ کتاب ریاضی یکسان، و ۴ کتاب فیزیک متمایز را می‌خواهیم داخل یک قفسه قرار دهیم، بطوریکه کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند، به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟





مثال: از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه ای بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چندتاست؟ (تمرین ص ۱۳۱ کتاب درسی)

مثال: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هرکدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

(کار در کلاس ص ۱۳۱ کتاب درسی)





مثال: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟ (تمرین ص ۱۳۱ کتاب درسی)



مثال: در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدام اند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر ۳ کلید دو ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟ (تمرین ص ۱۳۱ کتاب درسی)



ترکیب:

به انتخاب r شیء متمایز از بین n شیء متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، یک ترکیب r تایی

از آن n شیء گفته و با نماد $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

نکته:

$$۱) \binom{n}{.} = ۱$$

$$۲) \binom{n}{n} = ۱$$

$$۳) \binom{n}{۱} = n$$


$$۴) \binom{n}{n-۱} = n$$


$$۵) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$۶) \binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$۷) \binom{n}{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$$





مثال: از رابطه‌ی $\binom{n}{n-3} = 560$ مقدار n را بدست آورید. 

مثال: اگر $\binom{2x}{x+1} = \binom{2x}{3}$ باشد، مقادیر x را به دست آورید. 





مثال: اگر $p(n-1, 3) = C(n, n-4)$ باشد، مقدار n را به دست آورید. 

مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم سه نفره ی کوهنوردی تشکیل دهیم، به چند طریق این 

کار امکان پذیر است ؟





مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم سه نفره ی کوهنوردی تشکیل دهیم، به طوری که حداقل ۲ مرد در این تیم باشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟



مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن می خواهیم یک تیم سه نفره ی کوهنوردی تشکیل دهیم، به طوری که حداکثر ۲ مرد در این تیم باشند، به چند طریق این کار امکان پذیر است؟





مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن میخواهیم یک تیم سه نفره ی کوهنوردی تشکیل دهیم، به طوری که اعضای



تیم از یک نوع باشند، به چند طریق این کار امکانپذیر است؟

مثال: از بین ۵ مرد و ۴ زن میخواهیم یک تیم سه نفره ی کوهنوردی تشکیل دهیم، به طوری که تعداد



مردها بیشتر از تعداد زن ها باشد، به چند طریق این کار امکانپذیر است؟





(مثال ص ۱۳۴ کتاب درسی)

مثال: از میان شش کتاب مختلف:



الف) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می‌توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

مثال: در کیسه‌ای سه مهره‌ی سیاه، چهار مهره‌ی سفید و پنج مهره‌ی سبز موجود است. به تصادف و



هم‌زمان ۴ مهره از این کیسه انتخاب می‌کنیم، تعداد حالت‌هایی را حساب کنید که در بین مهره‌های انتخاب

شده، حتماً مهره‌های سیاه وجود داشته باشد؟





مثال: در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است

کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر: (مثال ص ۱۳۴ کتاب درسی)

(الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

(پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً ۲ داور ایرانی داشته باشد؟

(ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

(ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

(ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟





مثال: از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به



(کار در کلاس ص ۱۳۶ کتاب درسی)

چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:

(الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشد؟

(ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند؟

(پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟





مثال: از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته ی ۲ نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

(فعالیت ص ۱۳۶ کتاب درسی)



مثال:

(فعالیت ص ۱۳۸ کتاب درسی)

الف) یک مربی قصد دارد از بین بازیکنان شماره های ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱، سه نفر را برای رفتن به زمین بازی انتخاب کند. چند حالت برای این کار امکان دارد؟

ب) این بار این مربی قصد دارد از بین همان بازیکنان دو بازیکن انتخاب کند که روی نیمکت بنشینند. چه انتخاب هایی دارد؟





مثال: از ۱۰ کتاب ادبی متفاوت و ۸ کتاب علوم متفاوت، چند دسته ی ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی



و ۳ کتاب علوم می توان انتخاب کرد؟

مثال: از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه به چند طریق می توان سه نفر را طوری انتخاب کرد که



همواره یک فرد مورد نظر بین آن سه نفر باشد؟

مثال: از بین ۱۰ فوتبالیست، می خواهیم تیمی ۴ نفره تشکیل دهیم، به طوری که بهترین بازیکن حتماً



انتخاب شود و بدترین بازیکن حتماً انتخاب نشود. این عمل به چند طریق قابل انجام است؟





مثال: یک جمع ۸ نفری که رضا و حسین در بین آنها هستند مفروض است. به چند طریق می توان ۳ نفر از بین آنها انتخاب کرد به طوری که در بین انتخاب شدگان از بین رضا و حسین فقط یکی باشد؟



(فعالیت ص ۱۳۸ کتاب درسی)

مثال: جاهای خالی را پر کنید.



(الف) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی برابر است با:

(ب) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها هست برابر است با:

(پ) تعداد زیر مجموعه های ۵ عضوی از مجموعه حروف انگلیسی که حرف a در آنها نیست برابر است با:

(ت) بنابراین: $() = () + ()$





مثال: فرض کنیم A یک مجموعه ی n عضوی و a یکی از اعضای آن باشد. $(a \in A)$

(الف) تعداد زیر مجموعه های Γ عضوی مجموعه ی A برابر است با:

(ب) تعداد زیر مجموعه های Γ عضوی A که a در آنها هست، برابر است با:

(پ) تعداد زیر مجموعه های Γ عضوی A که a در آنها نیست، برابر است با:

(فعالیت ص ۱۳۸ کتاب درسی)

(ت) بنابراین: $() = () + ()$



مثال: یک فروشنده ی تنقلات در فروشگاه خود، پسته، بادام، گردو، تخمه ی کدو، تخمه ی ژاپنی،

نخودچی و کشمش دارد. از نظر او در یک آجیل حداقل پنج نوع از تنقلات فوق باید وجود داشته باشد. او با

تنقلات موجود در فروشگاهش چند نوع آجیل می تواند درست کند؟ (تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)





مثال: یک اداره دارای ۱۸ عضو است. این اداره دارای یک رئیس، ۳ معاون، ۲ حسابدار، ۶ کارشناس

اداری، ۳ کارمند کارگزینی و ۳ کارشناس امور حقوقی است. این اداره ماهانه باید جلسه ای ۵ نفره جهت بررسی و تصویب آخرین طرح های پیشنهادی برگزار کند. به چند طریق این گروه ۵ نفره می تواند انتخاب شود، هرگاه:

(تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)

(الف) رئیس و دقیقاً یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

(ب) رئیس و دقیقاً یک معاون و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟

(پ) رئیس و دقیقاً یک معاون، یک حسابدار و یک کارشناس امور حقوقی در جلسه باشند؟





مثال: در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این ۲ نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟ (تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)

مثال: گل فروشی در فروشگاه خود ۱۰ نوع گل مختلف دارد. او در هر دسته گل از ۳ تا ۵ شاخه گل متمایز قرار می دهد. او چند دسته گل مختلف می تواند درست کند؟ (تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)

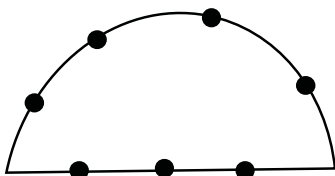




مثال: یک نقاش، قوطی‌هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب ۲ یا چند قوطی از رنگ‌های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید بدست آورد، او چند رنگ می‌تواند داشته باشد؟

(تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)

مثال: با ۷ نقطه‌ی مشخص شده در شکل زیر و به هم وصل کردن آنها، چند مثلث ایجاد می‌شود؟





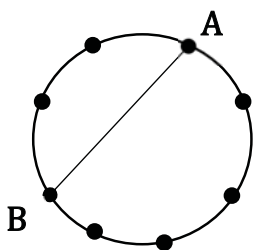
مثال: هفت نقطه ی A و B و C و D و E و F و G روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف

می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟ (تمرین ص ۱۳۹ کتاب درسی)



مثال: ۸ نقطه ی مطابق شکل روی دایره قرار گرفته اند. تعداد چهار ضلعی هایی که پاره خط AB قطر

آنها می باشد را بدست آورید.





مثال: یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر سه تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست



(تمرین ص ۱۴۰ کتاب درسی)

می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه:

الف) هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟

ب) دو نوع ادویه هستند که با هم نمی توانند استفاده شوند؟

پ) سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

ت) ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های


دسته دوم سازگاری ندارند؟



نکته: 

$$۱) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$۲) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید. 

$$\binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \dots + \binom{7}{6}$$

فصل هفتم

آمار و احتمال

□ فصل هفتم: آمار و احتمال

□ درس اول: احتمال

◀ آزمایش تصادفی :

پیشامدهایی وجود دارند که ممکن است رخ بدهند یا رخ ندهند و ما از چگونگی رخ دادن آن‌ها اطلاع نداریم به عنوان مثال تا زمانی که سکه را پرتاب نکردیم نتیجه پرتاب سکه پشت یا رو آمدن آن مشخص نیست چنین پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی را که نتیجه آن به طور دقیق قابل پیش بینی نباشد اما از همه حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن آنها مطلع باشیم پدیده‌های آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم به عنوان مثال نتیجه یک بازی فوتبال از قبل قابل پیش بینی نیست اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر کدام از تیم‌ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتند.

◀ فضای نمونه ای :

تمامی حالات ممکن از یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه ای گویند و با S نمایش می‌دهند.

◀ پیشامد :

زیر مجموعه ای از فضای نمونه ای را پیشامد (برآمد) گویند.



نکته: اگر A و B پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S باشند، در این صورت هر یک از پیشامدهای

$(A \cup B)$ ، $(A \cap B)$ و $(A - B)$ در فضای نمونه‌ای S به صورت‌های زیر توصیف می‌شوند:

(الف) اجتماع دو پیشامد:

پیشامد $(A \cup B)$ وقتی رخ می‌دهد (اتفاق می‌افتد) که حداقل یکی از دو پیشامد رخ بدهد. (یا A رخ بدهد

یا B رخ بدهد یا هر دو رخ بدهند.)

(ب) اشتراک دو پیشامد:

پیشامد $(A \cap B)$ وقتی رخ می‌دهد که دو پیشامد باهم رخ بدهند. (هم پیشامد A رخ بدهد و هم پیشامد

B رخ بدهد.)

(پ) تفاضل دو پیشامد:

پیشامد $(A - B)$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ بدهد و پیشامد B رخ ندهد.

(ت) متمم یک پیشامد:

اگر A یک پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیشامد A که با A' (یا A^c) نمایش داده می‌شود، وقتی

رخ می‌دهد که پیش آمد A رخ ندهد. واضح است که $A \cup A' = S$ و $A \cap A' = \emptyset$.

مثال: یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم:



(الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

(ب) پیشامد A که در آن تاس عدد فرد بیاید را مشخص کنید.



ج) پیشامد B که در آن سکه رو و تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید.

د) پیشامد C که در آن سکه رو یا تاس عدد کوچکتر از ۵ بیاید را مشخص کنید.

(مثال ص ۱۴۶ کتاب درسی)

مثال: یک تاس و ۲ سکه را با هم می‌اندازیم:

الف) فضای نمونه ای چند عضو دارد؟

ب) پیشامد آنکه هر دو سکه رو و تاس زوج باشد را تشکیل دهید.

پ) پیشامد آنکه هر دو سکه پشت یا تاس عدد ۵ بیاید را تشکیل دهید.



مثال: هر یک از اعداد طبیعی و زوج کوچکتر از ۱۱ را روی یک کارت می نویسیم و یکی از این کارت ها را

(تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)

به تصادف برمی داریم:

الف) فضای نمونه ای این آزمایش یا پدیده تصادفی را مشخص کنید.

ب) چه تعداد پیشامد تصادفی را روی این فضای نمونه ای می توان تعریف کرد؟

پ) پیشامد A را که در آن عدد روی کارت انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد مشخص کنید.



مثال: فرض کنید A و B و C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند. هر یک از عبارات های توصیفی زیر

(تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)

را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامد های A و C رخ بدهند ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.



مثال: هر یک از ارقام ۱ تا ۸ را روی یک کارت می نویسیم و آنها را در یک کیسه قرار می دهیم، سپس

یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم. هر یک از پیشامد های زیر را تعیین کنید:

(الف) فضای نمونه ای و پیشامد A که در آن عدد روی کارت زوج باشد. (تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)

(ب) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

(پ) پیشامد C که در آن عدد رو شده بزرگتر از ۲ باشد.

مثال: خانواده ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه ای مربوط به فرزندان این خانواده را و پیشامد آن که

حداقل یکی از فرزندان دختر باشد را مشخص کنید. (تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)



مثال: سکه ای را به هوا می اندازیم. اگر پشت بیاید، یک تاس می اندازیم و اگر رو بیاید دو سکه دیگر را

می اندازیم:

(تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)

الف) فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد آن که تاس زوج بیاید را مشخص کنید.

پ) پیشامد آنکه حداقل ۲ سکه رو بیاید را مشخص کنید.

◀ احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس):

می‌دانیم اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی باشد و $A \subseteq S$ یک پیشامد در فضای S باشد، احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ که به صورت $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود، عددی است حقیقی که $0 \leq P(A) \leq 1$ همچنین می‌دانیم $P(A)$ هر چقدر به ۱ نزدیک‌تر باشد شانس رخداد A بیشتر و هر چقدر به صفر نزدیک‌تر باشد، شانس رخداد A کمتر است. در واقع در مسائل احتمال با محاسبه $P(A)$ شانس رخداد پیشامد A را اندازه‌گیری می‌کنیم.



مثال: یک تاس را پرتاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که عدد تاس بزرگتر از ۴ باشد؟

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع دو تاس برابر ۷ باشد.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع دو عدد مضرب ۳ باشد؟

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع دو عدد تاس بزرگتر از ۹ باشد.

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. احتمال آن را بیابید که مجموع دو عدد تاس بزرگتر از ۵ باشد.



مثال: اگر دو تاس را با هم بیندازیم چقدر احتمال دارد:

(مثال ص ۱۴۸ کتاب درسی)

(الف) هر دو تاس زوج باشند؟

(ب) مجموع دو تاس ۸ یا هر دو تاس فرد باشند؟

(پ) مجموع دو تاس ۷ یا هر دو زوج باشند؟

(ت) مجموع دو تاس کمتر از ۱۱ باشند؟

(ث) حاصل ضرب دو عدد رو شده ۱۲ باشند؟



مثال: داخل جعبه ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد، می خواهیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه هر سه مهره هم‌رنگ باشد را بدست آورید.

مثال: داخل جعبه ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد، می خواهیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم، احتمال آنکه تعداد مهره های قرمز بیشتر از مهره های آبی باشد را بدست آورید.



مثال: در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز وجود دارد. از این کیسه ۴ مهره به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال اینکه حداکثر ۲ مهره آبی باشد، چقدر است؟

مثال: در جعبه ی A، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و در جعبه ی B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب می کنیم و یک مهره از آن خارج کنیم. چقدر احتمال دارد که این مهره آبی باشد؟



مثال: در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج

(مثال ص ۱۴۷ کتاب درسی)

کنیم، چقدر احتمال دارد:

(الف) هر سه مهره آبی باشند.

(ب) هر سه مهره هم رنگ باشند.

(پ) دقیقاً ۲ مهره هم‌رنگ باشند.



مثال: در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه وجود دارد. دو مهره متوالی و بدون جایگذاری از آن

بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال و بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟






مثال: فرض کنیم هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و بدون تکرار رقم می توانیم بسازیم، روی یک کارت می نویسیم و آنها را در کیسه‌ای قرار می دهیم. سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می کنیم، اگر پیشامد های A و B را به ترتیب «خارج شدن عدد زوج» و «خارج شدن عدد فرد» تعریف کنیم، شانس رخداد کدام پیشامد بیشتر است؟ (مثال ص ۱۴۷ کتاب درسی)



مثال: یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می پذیرد. اگر ۳۴ درصد از مشتریان کارت نوع A و ۶۲ درصد کارت نوع B و ۱۵ درصد هر دو کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن حداقل یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟ (تمرین ص ۱۵۱ کتاب درسی)




مثال: اگر حروف کلمه جهانگردی را به تصادف کنار هم قرار دهیم، چقدر احتمال دارد؟ 

(مثال ص ۱۴۹ کتاب درسی)

(الف) حرف (ی) آخر باشد؟

(ب) دو حرف (ی) و (د) کنار هم باشند؟

(پ) با حرف (ج) شروع و به حرف (ی) ختم شود؟

مثال: اگر ۷ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد: 

(تمرین ص ۱۵۱ کتاب درسی)

(الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

(ب) یکی از آنها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرند؟

مثال: می خواهیم از بین ۳ دانش آموز کلاس دهم رشته ریاضی و ۲ دانش آموز دهم رشته تجربی یک

تیم دو نفره تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به تصادف صورت پذیرد، چقدر احتمال دارد:

(تمرین ص ۱۵۰ کتاب درسی)

الف) هر دو نفر، از دانش آموزان کلاس دهم ریاضی باشند؟

ب) هر دو نفر، هم رشته باشند؟

پ) ۱ نفر از رشته ریاضی و ۱ نفر از رشته تجربی باشد؟

← قوانین احتمال:

$$۱) P(s) = 1$$

$$۲) 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$۳) P(A) = 1 - P(A')$$

$$۴) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$۵) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال: احتمال آنکه علی در درس ریاضی قبول شود، $0/7$ و احتمال آنکه در درس شیمی قبول شود، $0/8$ و احتمال آنکه در هر دو درس قبول شود، $0/6$ است. احتمال آنکه در یکی از دروس شیمی و ریاضی قبول شود چقدر است؟

◀ دو پیشامد ناسازگار :

اگر A و B دو پیشامد از آن فضای نمونه‌ای S باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت A و B را دو پیشامد ناسازگار می‌نامیم. در واقع دو پیشامد ناسازگار هیچگاه با هم رخ نمی‌دهند و داریم:

$$P(A \cap B) = 0$$

با توجه به تعریف متمم یک پیشامد، همواره هر پیشامد تصادفی مانند A و متمم آن یعنی A' ، دو پیشامد ناسازگارند.

نکته: اگر A ، B و C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، این سه پیشامد را دو به دو ناسازگار می‌نامیم هرگاه $A \cap B = \emptyset$ و $A \cap C = \emptyset$ و $B \cap C = \emptyset$ باشد.



مثال: اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B') = \frac{3}{4}$ و دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

◀ دو پیشامد مستقل:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند و رخداد یا عدم رخداد هریک تاثیری در رخداد دیگری نداشته باشند، این دو پیشامد را مستقل می نامیم و داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: احتمال قبولی علی در کنکور $\frac{3}{10}$ و احتمال قبولی حسین $\frac{4}{10}$ است. احتمال آنکه حداقل یکی

از این دو نفر در کنکور قبول شوند، چقدر است؟





مثال: چقدر احتمال دارد در یک تیم کوهنوردی ۳ نفره:



(الف) همه در تیر ماه به دنیا آمده باشند؟

(ب) هیچ دو نفری در یک ماه از سال متولد نشده باشند؟

مثال: ۴ نفر را در نظر می‌گیریم، چقدر احتمال دارد که:



(الف) هر ۴ نفر در یک روز از هفته متولد شده باشند؟

(ب) هیچ دو نفری در یک روز از هفته متولد نشده باشند؟



☑ **تست:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد، یک عضو از مجموعه‌ی فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش پذیر باشد، کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{177}{325} \quad (4)$$

$$\frac{168}{325} \quad (3)$$

$$\frac{67}{205} \quad (2)$$

$$\frac{66}{205} \quad (1)$$

☑ **تست:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه‌ی فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش پذیر باشد، کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{1}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{7} \quad (3)$$

$$\frac{4}{7} \quad (2)$$

$$\frac{13}{21} \quad (1)$$

☑ **تست:** دو تاس را باهم می‌اندازیم. احتمال آن که مجموع اعداد رو شده مضرب ۳ باشد، کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{7}{18} \text{ (۴)}$$

$$\frac{5}{18} \text{ (۳)}$$

$$\frac{1}{3} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** دو تاس را باهم پرتاب میکنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب ۴ است؟ (کنکور)

$$\frac{5}{12} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ (۳)}$$

$$\frac{5}{18} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{9} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** سه تاس سالم را باهم پرتاب می‌کنیم. احتمال این که مجموع ۳ عدد ظاهر شده برابر ۶ باشد، کدام است؟ (کنکور)

$$\frac{2}{59} \quad (4)$$

$$\frac{5}{108} \quad (3)$$

$$\frac{7}{108} \quad (2)$$

$$\frac{5}{72} \quad (1)$$

☑ **تست:** پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟ (کنکور)

$$\frac{1}{56} \quad (4)$$

$$\frac{1}{28} \quad (3)$$

$$\frac{1}{21} \quad (2)$$

$$\frac{1}{14} \quad (1)$$

✓ **تست:** در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم‌رنگ هستند؟ (کنکور)

$$\frac{31}{60} \quad (4)$$

$$\frac{79}{120} \quad (3)$$

$$\frac{37}{60} \quad (2)$$

$$\frac{41}{120} \quad (1)$$

✓ **تست:** در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟ (کنکور)

$$\frac{4}{11} \quad (4)$$

$$\frac{7}{22} \quad (3)$$

$$\frac{3}{11} \quad (2)$$

$$\frac{5}{22} \quad (1)$$

✓ **تست:** در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور تصادفی پی در پی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

$$0/25 \text{ (4)}$$

$$0/2 \text{ (3)}$$

$$0/15 \text{ (2)}$$

$$0/1 \text{ (1)}$$

✓ **تست:** در جعبه‌ای ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز موجود است. به تصادف ۴ مهره از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال یک مهره قرمز و حداقل ۲ مهره سفید، خارج شده است؟ (کنکور)

$$\frac{50}{143} \text{ (4)}$$

$$\frac{40}{143} \text{ (3)}$$

$$\frac{25}{77} \text{ (2)}$$

$$\frac{30}{91} \text{ (1)}$$

☑ **تست:** در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند? (کنکور)

$$\frac{32}{45} \quad (4)$$

$$\frac{31}{45} \quad (3)$$

$$\frac{29}{45} \quad (2)$$

$$\frac{28}{45} \quad (1)$$

☑ **تست:** در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟ (کنکور)

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{2}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{7} \quad (2)$$

$$\frac{5}{14} \quad (1)$$

☑ **تست:** در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از طرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟ (کنکور)

$$\frac{5}{14} \text{ (۴)}$$

$$\frac{2}{9} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{14} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{6} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

(کنکور)

$$\frac{9}{10} \text{ (۴)}$$

$$\frac{4}{5} \text{ (۳)}$$

$$\frac{3}{4} \text{ (۲)}$$

$$\frac{2}{3} \text{ (۱)}$$

☑ **تست:** چهار دانش آموز یک کلاس که بر نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان

یکسان است؟ (کنکور)

$$\frac{55}{96} \quad (4)$$

$$\frac{23}{48} \quad (3)$$

$$\frac{41}{96} \quad (2)$$

$$\frac{19}{48} \quad (1)$$

□ فصل هفتم: آمار و احتمال

□ درس دوم: آمار

◀ آمار:

مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

◀ علم آمار:

مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش، تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی می شود.

◀ جامعه:

مجموعه ی تمام افراد یا اشیایی که درباره ی یک یا چند ویژگی آنها تحقیق صورت گیرد، جامعه یا جمعیت نامیده می شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می نامند. تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند. به عنوان مثال، دانش آموزان یک مدرسه می توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

◀ نمونه:

بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شود، نمونه گویند و هر یک افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند. تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند. به عنوان مثال دانش آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش آموزان کلاس عضو نمونه محسوب می شوند.

◀ متغیر :

ویژگی از اعضای یک جامعه که بررسی و مطالعه می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

◀ انواع متغیرها :

۱- کمی: متغیرهایی را که قابل اندازه گیری اند، متغیرهای کمی گویند. به عنوان مثال تعداد فرزندان خانواده و وزن افراد متغیرهای کمی اند.

۲- کیفی: متغیرهایی را که قابل اندازه گیری نیستند، متغیرهای کیفی گویند. به عنوان مثال گروه خونی افراد و پاسخ سوال میزان لذت بردن از آشپزی، متغیرهای کیفی اند.

(کار در کلاس ص ۱۶۳ کتاب درسی)

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

- الف) انواع هواپیما (مسافربری، باربری، جنگنده): کمی کیفی
- ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه برسید. کمی کیفی
- پ) رنگ چشم (میشی، آبی، قهوه ای): کمی کیفی

◀ انواع متغیرهای کمی :

۱- پیوسته: متغیری است که اگر دو مقدار a و b را بتواند اختیار کند، هر مقدار بین آنها را می تواند اختیار کند، مانند: قد، وزن و معدل.

۲- گسسته: متغیری که پیوسته نباشد مانند تعداد اعضای خانواده و



مثال: انواع متغیرهای زیر را مشخص کنید:

(کار در کلاس ص ۱۶۵ کتاب درسی)

- الف) تعداد ماهی های یک دریا: گسسته پیوسته
- ب) مدت زمانی که طول می کشد از خانه به مدرسه رسید: گسسته پیوسته
- پ) وزن افراد: گسسته پیوسته
- ت) تعداد دانش آموزان یک مدرسه: گسسته پیوسته

انواع متغیرهای کیفی:

۱- ترتیبی: متغیری است که در آن نوعی ترتیب طبیعی وجود داشته باشد مانند مراحل تحصیل، مراحل زندگی و...

۲- اسمی: متغیری که ترتیبی نباشد مانند گروه خونی افراد، گازهای موجود در هوا و ...



مثال: با پرکردن جاهای خالی اسمی یا ترتیبی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید

الف) مراحل رشد یک انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان سال و کهن سال)

اسمی ترتیبی

ب) نژاد افراد (سفید، پوست، زرد پوست و سیاه پوست)

اسمی ترتیبی

پ) رنگ موی افراد (مشکی، قهوه ای، طلایی)

اسمی ترتیبی

ت) کیفیت میوه هلو (درجه ۱، درجه ۲، درجه ۳)

اسمی ترتیبی

(تمرین ص ۱۶۸ کتاب درسی)





مثال: نوع متغیرها را در نمودار زیر دسته بندی کنید.

(تمرین ص ۱۶۸ کتاب درسی)

۱- میزان بارندگی بر حسب سانتی متر در یک شهر نوع

۲- نوع بارندگی (باران، برف)

۳- تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند

۴- میزان دمای هوا

۵- شدت آلودگی هوا (زیاد، متوسط، کم)

۶- انواع وضعیت هوا (آفتابی، ابری، بارانی، برفی)

۷- شدت بارندگی (زیاد، متوسط، کم)

◀ شاخص توده ی بدن:

$$BMI = \frac{\text{وزن (کیلوگرم)}}{(\text{قد (متر)})^2}$$



مثال: فرض کنید وزن شخصی ۱۰۰ کیلوگرم و قدش یک متر و ۴۷ سانتی متر باشد، شاخص توده ی بدن

شخص را به دست آورید. (مثال ص ۱۵۶ کتاب درسی)

