

- ۱ رادبان
- ۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا
- ۳ توابع مثلثاتی
- ۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

به نام خدا

حل فعالیت ها - کار در کلاسها و تمرین ها



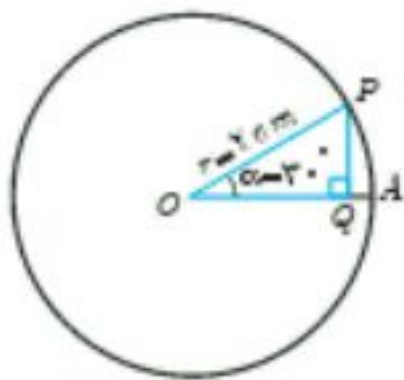
رادبان

درس

09213102271-09125102271-@moharrammahdi

صنفي ۹۲

فعالیت



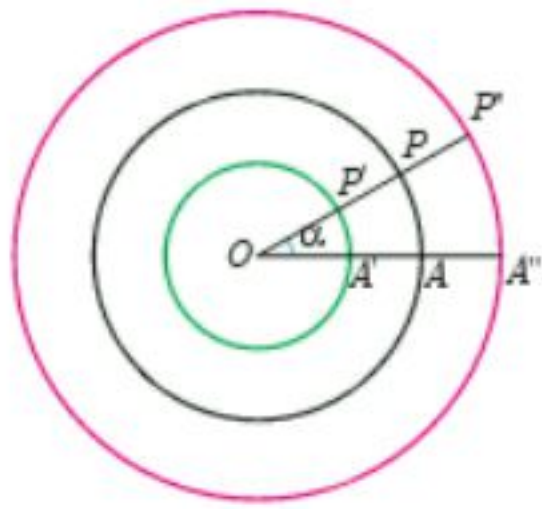
۱ دایره مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر داده شده است. اندازه ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت های مثلثاتی سال گذشته به دست آورید.

$$\begin{aligned} \triangle OPQ : \sin 30^\circ &= \frac{PQ}{OP} \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow \frac{PQ}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow PQ = 1$$

۲ با توجه به اینکه کمان 30° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می توان طول کمان روبرو به زاویه α (یعنی \widehat{PA}) را به صورت زیر به دست آورد.

$$\widehat{PA} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 2 = \frac{4}{12}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\widehat{PA} = 36^\circ \quad 36^\circ \div 30^\circ = 12$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳
ساعتی متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P''A''}$ را
که روبه‌رو به زاویه $\alpha = 30^\circ$ هستند به دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \dots\dots$$

$$\widehat{P''A''} = \dots\dots$$

$$\widehat{P'A'} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 1 = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \text{ cm}$$

$$\widehat{P''A''} = \frac{1}{12} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{12} \times 2\pi \times 3 = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم
چه رابطه‌ای دارند؟

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \dots\dots$$

$$\frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\pi/6}{1} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\pi/6}{2} = \frac{\pi}{12}$$

$$\frac{\widehat{P''A''}}{OP''} = \frac{\pi/6}{3} = \frac{\pi}{18}$$

این نسبت‌ها با هم برابرند

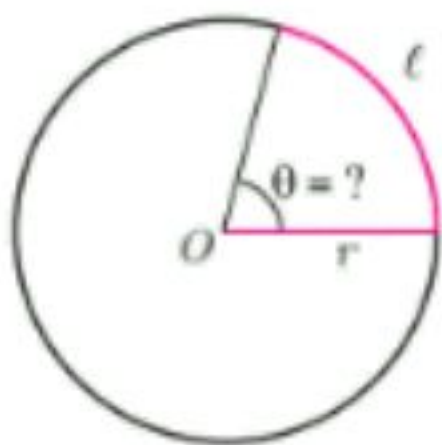
ب) اگر در شکل صفحه قبل دایره ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{1}{12} \times 2\pi \times r}{r} = \frac{\pi}{6}$$

خاطر

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه رو به زاویه 30° به شعاع، در همه دایره ها برابر مقدار ثابت $\frac{\pi}{6}$ است. اکنون در سؤال زیر به این می پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۳ در یک دایره به شعاع r ، مانند شکل زیر، طول کمان روبه رو به زاویه θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازه زاویه θ تقریباً چند درجه است؟ (از مقاله استفاده کنید)



$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{شعاع}} = \frac{L}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$\theta = \frac{L}{r}$$

$$\theta \approx 4^\circ$$

زاویه بر حسب درجه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۱۸۰°
زاویه بر حسب رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π	$\frac{۷\pi}{۴}$

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

۱ $\rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{۳۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۳۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۴}$

۲ $\rightarrow \frac{\pi}{۴} = \frac{۱۸۰}{۴} = ۴۵^\circ$ ۳ $\rightarrow \frac{\pi}{۳} = \frac{۱۸۰}{۳} = ۶۰^\circ$

۴ $\rightarrow \frac{۹۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۹۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۲}$

۵ $\rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{\pi}{\pi} \rightarrow D = ۱۸۰^\circ$

۶ $\rightarrow \frac{۲۷۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۲۷۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{۳\pi}{۲}$

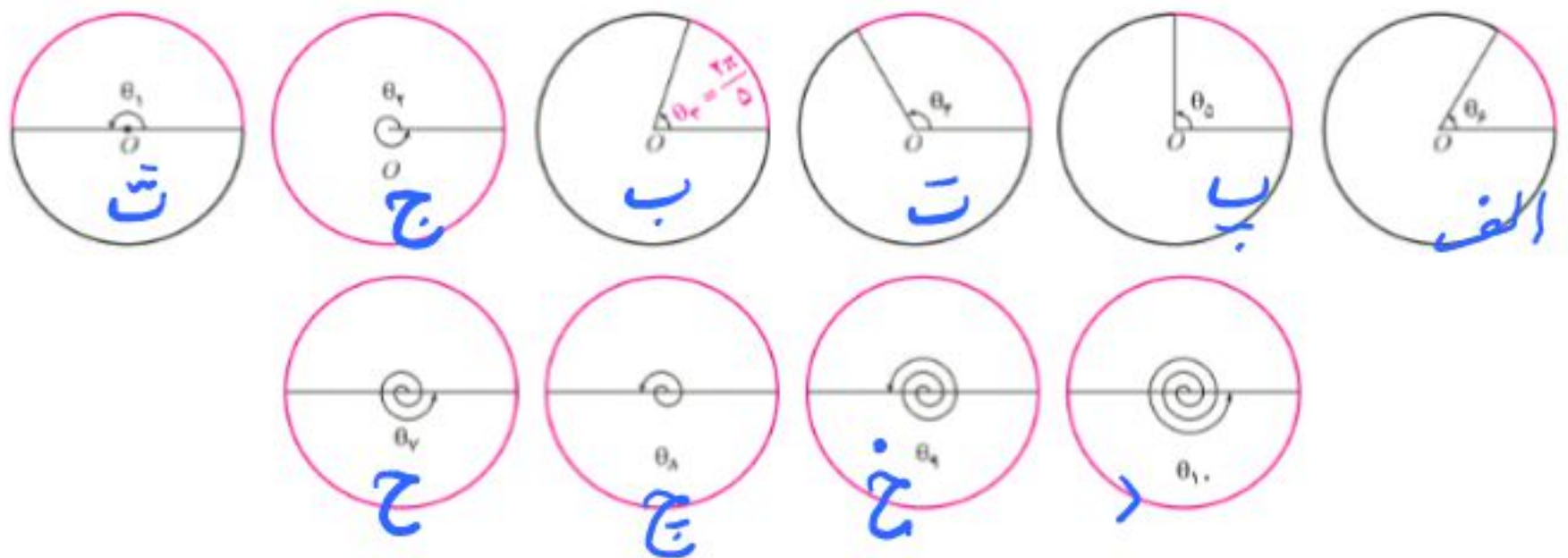
۷ $\rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{\pi} \rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = ۲ \rightarrow D = ۳۶۰^\circ$

۸ $\rightarrow \frac{۳۹۰}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \rightarrow R = \frac{۳۹۰ \cdot \pi}{۱۸۰} = \frac{۱۳\pi}{۴}$

۹ $\rightarrow \frac{۷\pi}{۳} = \frac{۷ \times ۱۸۰}{۳} = ۴۲۰^\circ$

۲ در زیر، اندازه برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

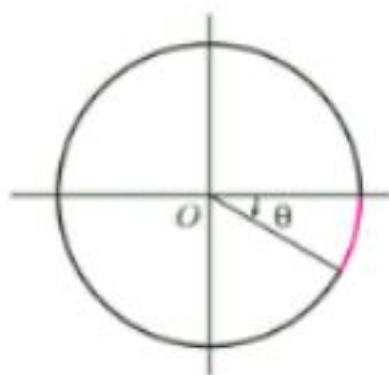
الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ ب) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ت) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π ج) 2π ح) 2π خ) 5π د) 6π



۲ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را در جاهای خالی بنویسید.

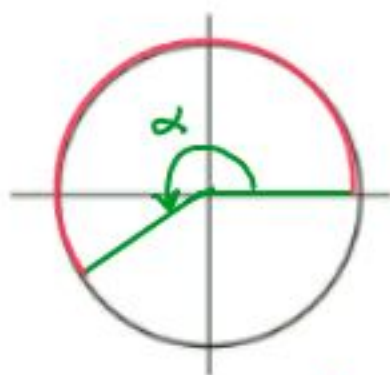
θ (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π
نسبت							
$\sin\theta$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تَن	تَن	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰	۰	تَن

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



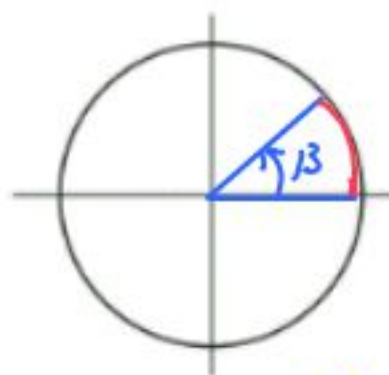
$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



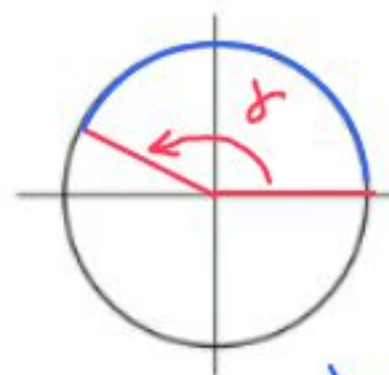
$$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

انتهای کمان در ربع دوم است. *لکه سوم*



$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

انتهای کمان در ربع اول است. *زاد*

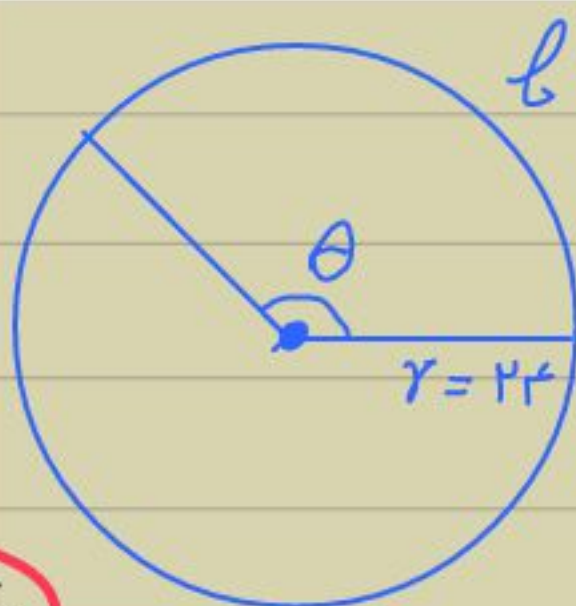


$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

انتهای کمان در ربع دوم است. *لکه دوم*



۲ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه 120° طی می‌کند. $(\pi = 3/14)$
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟



الف

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{l}{24}$$

$$l = \frac{48\pi}{3} = 16\pi$$

توجه

$$120^\circ \rightarrow \frac{120}{180} = \frac{R}{\pi}$$

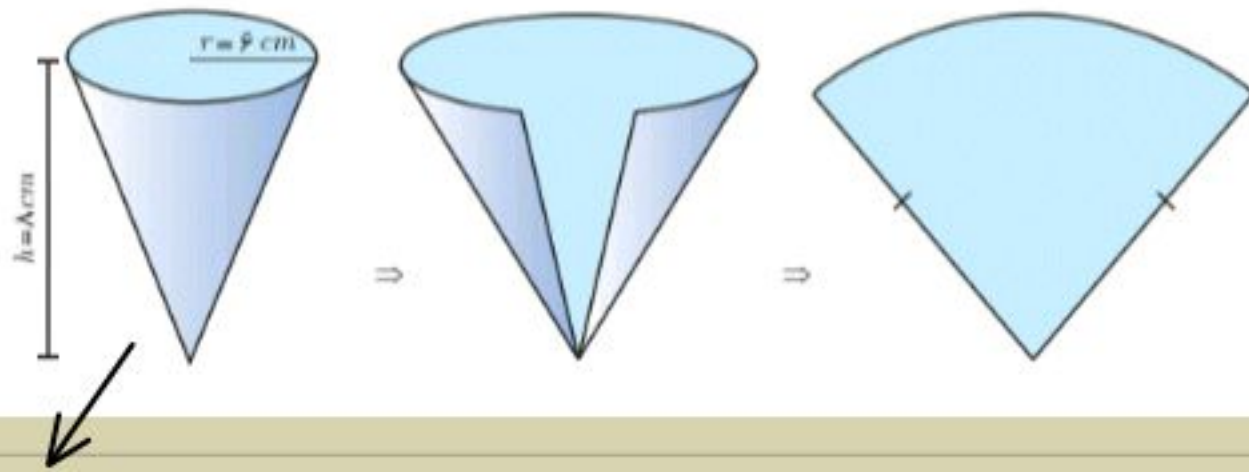
$$R = \frac{120 \times \pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$$

رادیان

$$l = 16 \times 3,14 = 50,24 \text{ cm}$$

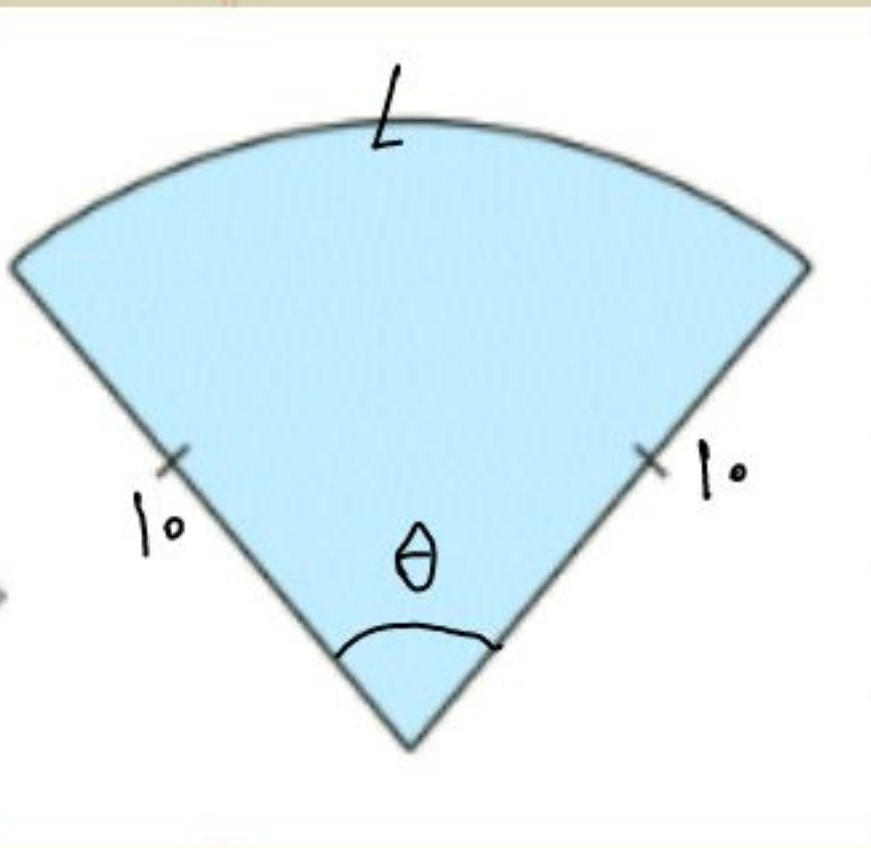
ب

۳ شکل فضایی و نیز شکل گسترده یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=6\text{ cm}$ و ارتفاع آن $h=8\text{ cm}$ می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



$$R^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$

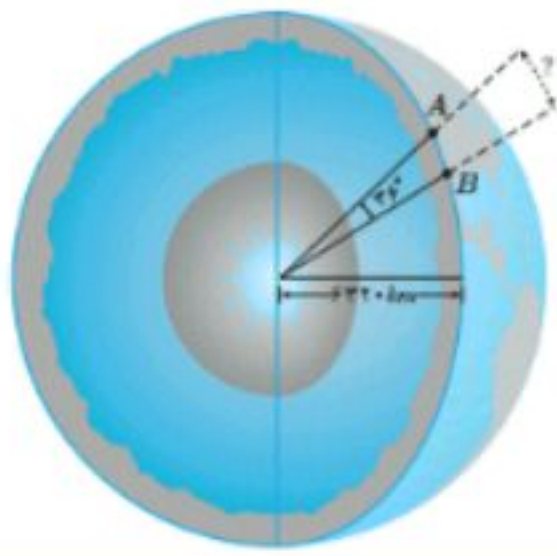
$$R = \sqrt{100} = 10$$



محیط دایره ۱ به شعاع ۶

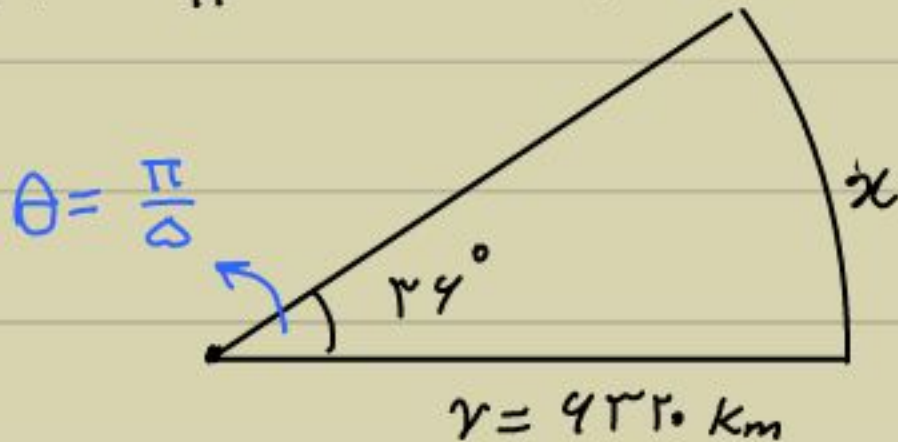
$$l = 2\pi \times 6 = 12\pi$$

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$



فاصله دو نقطه A و B از کره زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازه شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطه داده شده را بیابید.

$$\theta = 34^\circ \rightarrow \frac{37}{180} = \frac{r}{\pi} \rightarrow r = \frac{37\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$



$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \frac{\pi}{5} = \frac{x}{4320}$$

$$x = \frac{4320 \pi}{5} = 1274 \pi \text{ km}$$

فاصله بین دو نقطه

