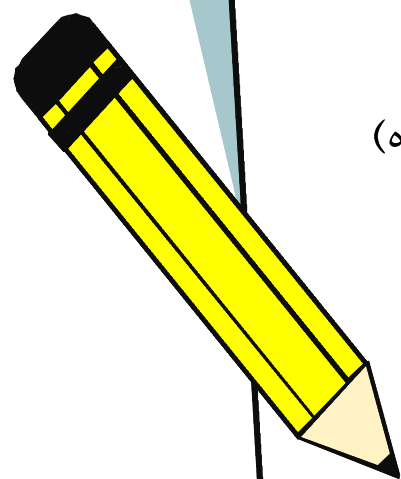


دردوین این جزوه از تجربیات مؤلفین کتاب های زیر  
نیز استفاده شده و در تالیف از سوالات که از نظر نگارنده  
غیر قابل چشم پوشی بودند عیناً نقل گردیده است.

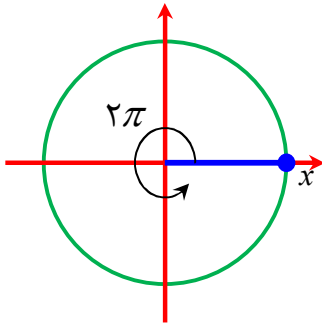
- ۱- کتاب درسی ریاضی دوازدهم تجربی
- ۲- حرف آخر (مهندس منتظری)
- ۳- مثلثاتی انتشارات خوشخوان (کاظم اجلالی)
- ۴- حسابان خیلی سبز (علی بیطرفان)
- ۵- دیفرانسیل پیشرفته خیلی سبز (حسین شفیع زاده)
- ۶- سه سطحی قلم چی
- ۷- خط ویژه ی گاج
- ۸- تست های کنکور سراسری



## حل معادلات مثلثاتی

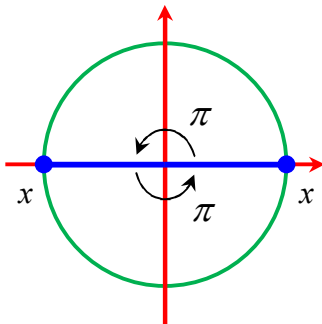


عقربه‌ی یک سر:



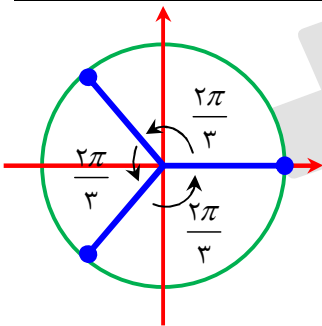
$$x = \{ \dots \circ (2\pi), 1(2\pi), 2(2\pi), \dots \} \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{1} \quad (1)$$

عقربه‌ی دو سر:

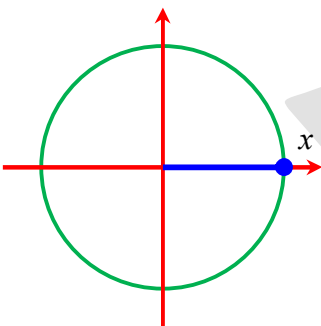


$$x = \{ \dots \circ (\pi), 1(\pi), 2(\pi), \dots \} \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} \quad (2)$$

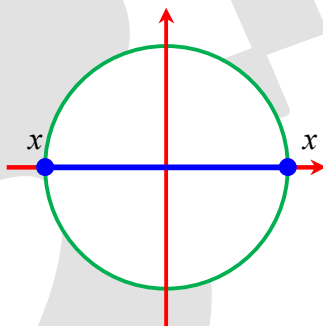
عقربه‌ی سه سر:



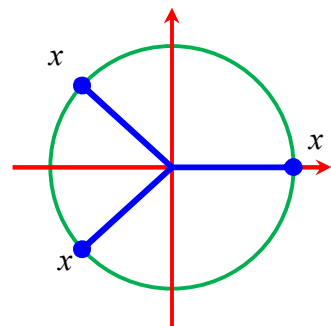
$$x = \left\{ \dots \circ \left( \frac{2\pi}{3} \right), 1\left( \frac{2\pi}{3} \right), 2\left( \frac{2\pi}{3} \right), \dots \right\} \Rightarrow x = k \left( \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



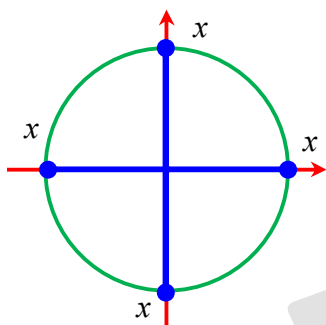
$$x = \frac{2k\pi}{1} \quad (1)$$



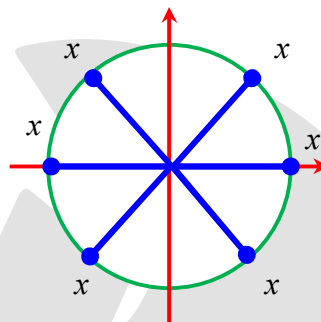
$$x = \frac{2k\pi}{2} \quad (2)$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad (3)$$



$$x = \frac{2k\pi}{4}$$



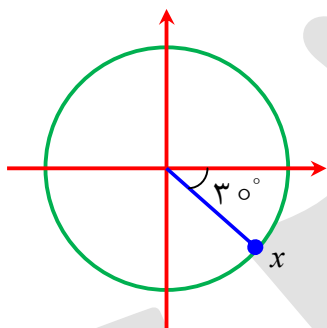
$$x = \frac{2k\pi}{6}$$

### عقربه‌ی $n$ سر دوران یافته:

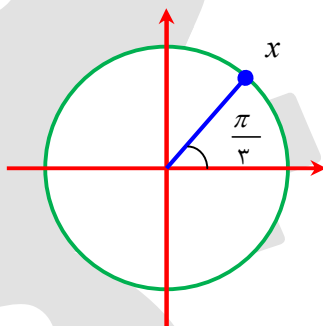
عقربه‌های  $n$  سر ممکن است به اندازه‌ی  $\alpha$  رادیان دوران داشته باشند در این صورت فرمول عمومی  $x$  را می‌توان برای عقربه‌های  $n$  سر به صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{2k\pi}{n} \begin{cases} \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت مثبت}} \frac{2k\pi}{n} + \alpha \\ \xrightarrow{\text{رادیان دوران درجهت منفی}} \frac{2k\pi}{n} - \alpha \end{cases}$$

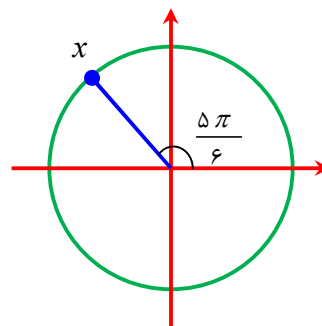
سؤال: فرمول عمومی زاویه‌ی  $x$  را در هر یک از شکل‌های زیر بدست آورید.



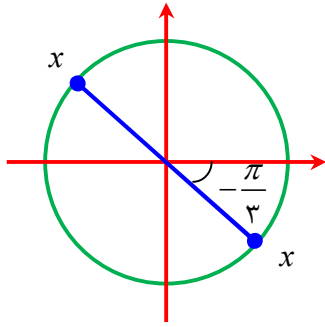
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$$



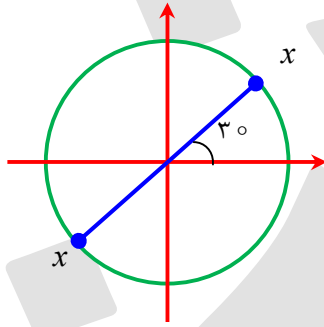
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$



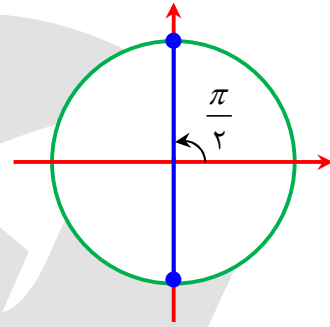
$$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$



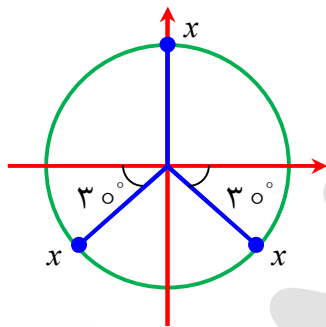
$$x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$



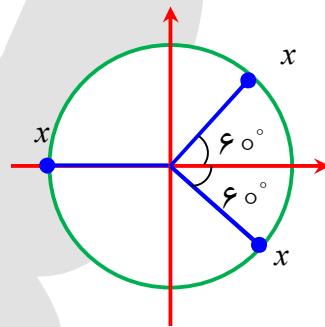
$$x = k\pi + \frac{\pi}{6}$$



$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



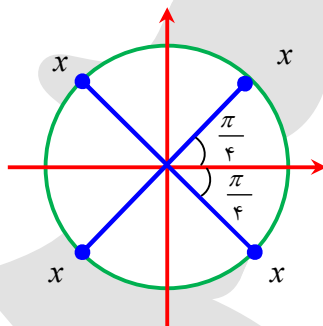
$$x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$



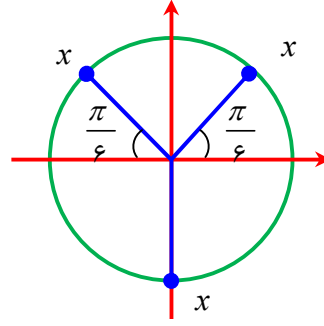
$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$



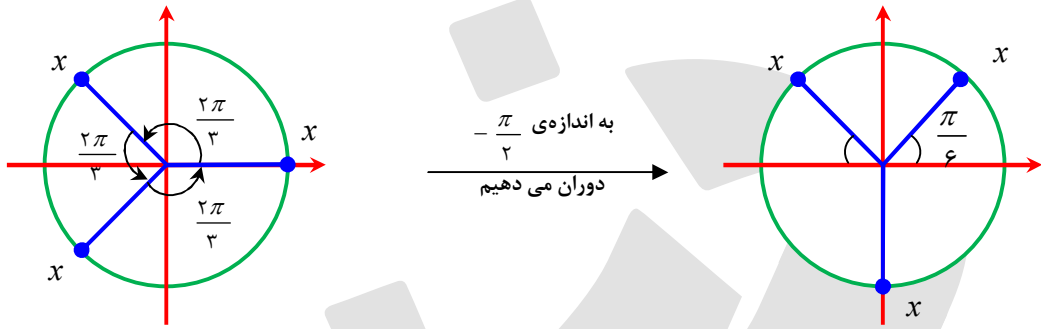
دو شکل خیلی مهم: 



$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



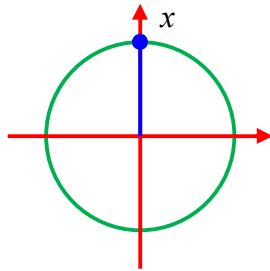
$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



حل معادله ی  $\sin x = a$  به روش شهودی

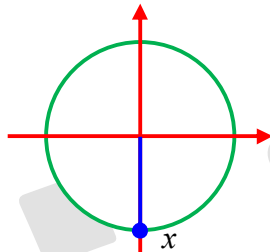
معادله های زیر را حل کنید.

۱)  $\sin x = 1$



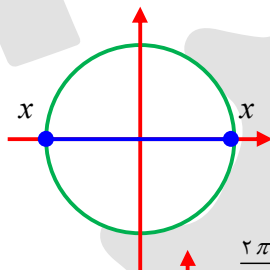
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

۲)  $\sin x = -1$



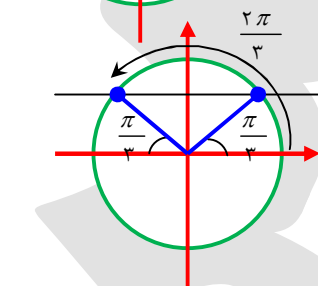
$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

۳)  $\sin x = 0$



$$x = k\pi$$

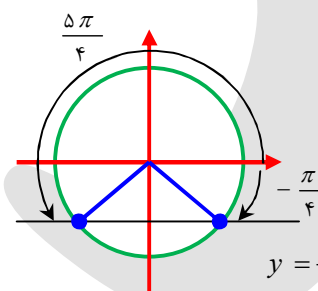
۴)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۵)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

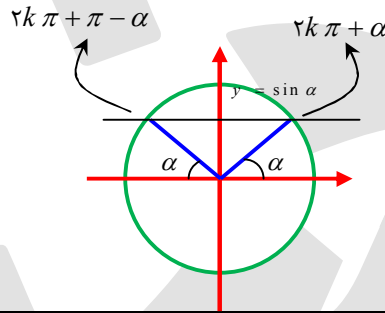


$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$



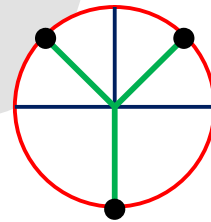
•)  $\sin 3x = \sin \frac{\pi}{2}$  (تمرین کتاب درسی)

$$\sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

•)  $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$  (تمرین کتاب درسی)

$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$



•)  $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$  (تمرین کتاب درسی)

ادامه‌ی حل دقیقاً مانند تمرین بالاست  $\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ 

•)  $2\sin 3x = \sqrt{2}$  (تمرین کتاب درسی)

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

•)  $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$  (تمرین کتاب درسی)

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

📖 سؤال ۲: مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است اگر اندازه‌ی دو ضلع آن به ترتیب ۲، ۶ سانتی متر باشد

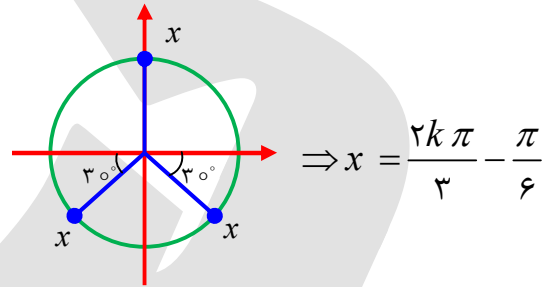
آنگاه چند مثلث با این خاصیت ها می توان ساخت؟ (تمرین کتاب درسی)

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \xrightarrow{0 < \theta < \pi} \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

پس ۲ مثلث می توان ساخت.

سؤال ۳: جواب کلی معادله  $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$  را بدست آورید.

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

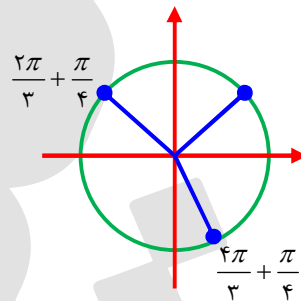
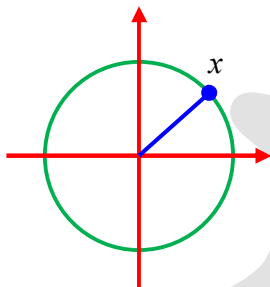


سؤال ۴: جواب کلی معادله  $\sin 3x = \sin 2x$  را بدست آورید. (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 5x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

سؤال ۵: معادله  $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد. (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

توجه:  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$  در دل  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  قرار دارد (زیرمجموعه‌ی  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  است) پس جواب

کلی  $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$  خواهد بود و تعداد جواب ها در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر ۳ است.

سؤال ۶: کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله  $\frac{\sin 7x}{\sin x} + 2\cos x = 0$  بر حسب درجه کدام است؟

۴۰° (۴)

۳۶° (۳)

۲۰° (۲)

۱۰° (۱)

پاسخ: گزینه (۳)

$$\frac{\sin 7x + 2 \sin x \cos x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{\sin 7x + \sin 2x}{\sin x} = 0 \xrightarrow{x \neq k\pi} \sin 7x = -\sin 2x \Rightarrow \sin 7x = \sin(-2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7x = 2k\pi + (-2x) \\ 7x = 2k\pi + \pi - (-2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{9} \\ 5x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5} \end{cases}$$

کوچکترین ریشه‌ی مثبت  $x = \frac{2k\pi}{9}$  به ازای  $k=1$  برابر  $\frac{2\pi}{9}$  و کوچکترین ریشه‌ی مثبت  $x = \frac{(2k+1)\pi}{5}$  به ازای  $k=0$  برابر

$\frac{\pi}{5}$  می‌شود با توجه به اینکه  $\frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{9}$ ، پس کوچکترین ریشه‌ی مثبت معادله برابر  $36^\circ = \frac{\pi}{5}$  است.

**سؤال ۷:** در معادله  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  جواب‌ها روی دایره‌ی مثلثاتی نمایش رئوس کدام چند ضلعی است.

(۴) شش ضلعی منتظم

(۳) مستطیل غیرمربع

(۲) مربع

(۱) لوزی

پاسخ: گزینه (۲)

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

جواب‌هایی که در بازه  $[0, 2\pi]$  قرار دارند عبارتند از:  $\left\{\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$

که روی دایره‌ی مثلثاتی تشکیل یک مربع می‌دهند زیرا: فاصله‌ی هر دو زاویه‌ی متوالی برابر  $\frac{\pi}{2}$  است.

**سؤال ۸:** معادله  $2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1$  در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  چند جواب دارد.

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

پاسخ: گزینه (۱)

$$2 \cos x \tan x + \cos 2x = 1 \Rightarrow 2 \cos x \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \cos 2x \Rightarrow 2 \sin x = 1 - \cos 2x \xrightarrow{\cos x \neq 0} 2 \sin x = 2 \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x(1 - \sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

با توجه به فرض  $\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos x \neq 0$



پاسخ  $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  غیر قابل قبول است و تنها جواب  $x = 2k\pi$  قابل قبول است. پس جواب های موجود در بازه  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

برابر است با:  $\{0, \pi\}$

**سؤال ۹:** مجموع جواب های معادله  $1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right)$  در بازه  $(0, 2\pi)$  کدام است.

$4\pi$  (۴)

$3\pi$  (۳)

$2\pi$  (۲)

$\pi$  (۱)

(تقدیم به دانش آموزان باهوشم)

پاسخ: گزینه (۴)

با استفاده از رابطه  $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  می توان نوشت:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - \cos^2 x)\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right)$$

$$\text{معادله: } 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < \frac{\pi}{2}\sin^2 x < \frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\sin^2 x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

مجموع جواب های فوق برابر  $4\pi = \frac{16\pi}{4}$  است.

**سؤال ۱۰:** مجموع جواب های معادله  $5 = 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3\cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)$  در فاصله کدام است؟

$\frac{5\pi}{8}$  (۴)

$\frac{5\pi}{4}$  (۳)

$\frac{3\pi}{8}$  (۲)

$\frac{3\pi}{4}$  (۱)

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$\cos\left(x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x - \frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 5$$

با فرض  $\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = t$  داریم:

$$2t^2 + 3t - 5 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است.}} \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

توجه شود که چون  $t = \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$  بود و سینوس همواره بین -۱ و ۱ است. پس  $-\frac{5}{2}$  نمی تواند باشد:

$$\Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8}$$

چون گفته  $0 \leq x \leq 2\pi$  پس تنها جواب معادله  $x = \frac{5\pi}{8}$  است (به ازای  $k = 0$ ) گزینه (۴) درست است.

**سؤال ۱۱:** جواب کلی معادله  $1 = \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x}$  به کدام صورت است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  (۴)

$k\pi \pm \frac{\pi}{4}$  (۳)

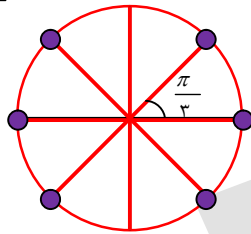
$k\pi + \frac{\pi}{3}$  (۲)

$\frac{k\pi}{3}$  (۱)

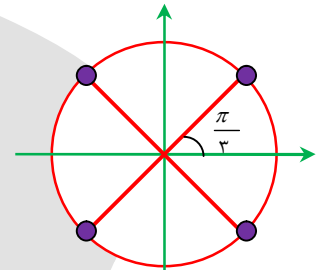
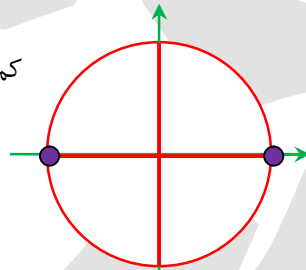
$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1 \quad \sin x \neq 0 \quad \sin 3x + \sin x = \sin x \Rightarrow \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3}$$

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$



کم می کنیم

گزینه (۳) درست است.  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$  = مجموعه جواب

سؤال ۱۲: جواب کلی معادله مثلثاتی  $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \sin(\pi + x) = 0$  (سراسری ریاضی ۸۷)

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۳)$$

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۲)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \left( \frac{\pi}{2} + x \right) \sin(\pi + x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \cos x (-\sin x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \cos x \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

گزینه (۱) صحیح است.

سؤال ۱۳: جواب های کلی معادله مثلثاتی  $\cos 2x = \sin x$  به صورت  $x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  بیان شده است.

مجموعه ی مقادیر  $i$  کدام است. (سراسری ریاضی ۸۳) (تمرین کتاب درسی)

$$\{1, 5, 9\} \quad (۴)$$

$$\{3, 4, 7\} \quad (۳)$$

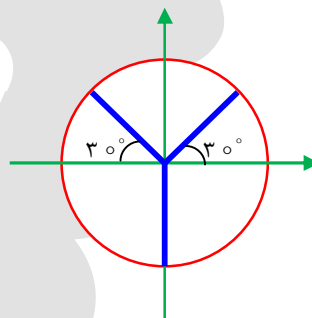
$$\{1, 3, 5\} \quad (۲)$$

$$\{7, 9\} \quad (۱)$$

$$\cos 2x = \sin x \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

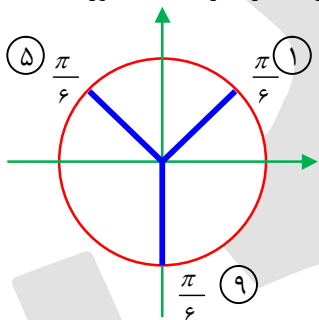
$$\xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



جواب کلی

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

اما در صورت سوال جواب به صورت  $2k\pi + \frac{i\pi}{6}$  نمایش داده شده است یعنی باید هر یک از عقربه ها به صورت یک سر نگاه کنیم:



$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{i\pi}{6} \\ 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \rightarrow i \in \{1, 5, 9\} \\ 2k\pi + \frac{9\pi}{6} \end{cases}$$

سؤال ۱۴: مجموع تمام جواب های معادله مثلثاتی  $\sin 5x + \sin 4x = 1 + \cos \pi$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است.

$$11\pi \quad (۴)$$

$$10\pi \quad (۳)$$

$$9\pi \quad (۲)$$

$$8\pi \quad (۱)$$

$$\sin \Delta x + \sin \epsilon x = 1 + (-1) = 0 \Rightarrow \sin \Delta x = -\sin \epsilon x = \sin(-\epsilon x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x = 2k\pi - \epsilon x \Rightarrow 9x = 2k\pi \\ \Delta x = 2k\pi + \pi - (-\epsilon x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{9} \\ x = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$x = \frac{2k\pi}{9}, x \in [0, 2\pi]:$$

$$x = 0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{12\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{16\pi}{9}, \frac{18\pi}{9}$$

حاصل جمع این جواب ها می شود  $10\pi$  اگر بخواهیم سریع بگوییم، مقادیر بالا دنباله ای حسابی تشکیل داده اند. اولین جمله صفر و آخرین جمله  $2\pi$  و تعداد جملات ۱۰ تا است:  $S_{10} = \frac{10}{2}(0+2\pi) = 10\pi$  و اگر  $x = (2k+1)\pi$  و چون  $0 \leq x \leq 2\pi$  پس  $x = \pi$  است پس مجموع جواب های این فاصله می شود  $10\pi + \pi = 11\pi$ . گزینه (۴) درست است.

سؤال ۱۵: جواب کلی معادله  $\cos^2 x = \sin x (\sin x + 1)$  کدام است.

$$2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad (۴)$$

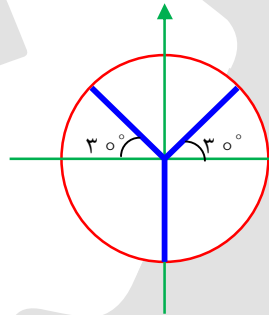
$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \quad (۱)$$

$$\cos^2 x = \sin^2 x + \sin x \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin^2 x = \sin x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۱۶: جواب کلی معادله  $\tan x + \cot x = -8 \cos 2x \cos 4x$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \quad (۴)$$

$$\frac{k\pi}{4} \pm \frac{\pi}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \quad (۲)$$

$$\frac{k\pi}{8} \pm \frac{\pi}{16} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{\sin 2x} = -8 \cos 2x \cos 4x \xrightarrow{x \neq \frac{k\pi}{2}} \rightarrow$$

$$2 = -8 \sin 2x \cos 2x \cos 4x$$

$$\underbrace{\sin 2x \cos 2x}_{\frac{1}{2} \sin 4x}$$

$$\underbrace{\cos 4x}_{\frac{1}{2} \sin 8x}$$

$$2 = -2 \sin 8x \Rightarrow \sin 8x = -1 \Rightarrow 8x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$$

گزینه (۲) درست است.

سؤال ۱۷: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $\sin 3x + \sin x = 0$  کدام است.

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۱) \quad k\pi \quad (۲) \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۳) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\Rightarrow \sin 3x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin 3x = -\sin x = \sin(-x)$$

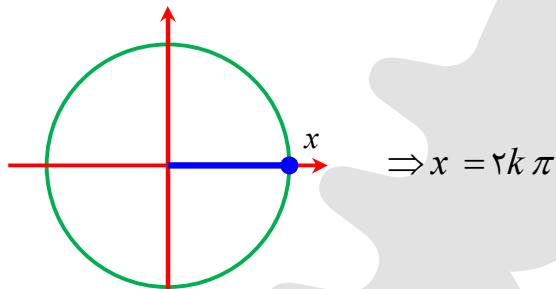
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 2x = (2k+1)\pi \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \end{cases}$$

دسته جواب اول (مضارب  $\frac{\pi}{2}$ )، دسته جواب دوم (مضارب فرد  $\frac{\pi}{2}$ ) را هم شامل می شود پس جواب معادله  $x = \frac{k\pi}{2}$  است. گزینه (۱) درست است.

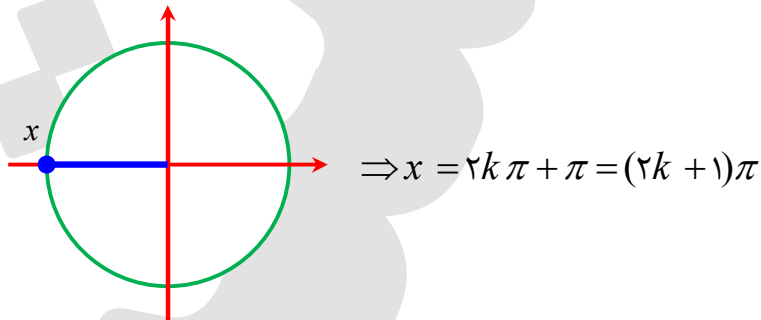
حل معادله‌ی  $\cos x = a$  به روش شهودی

معادله های زیر را حل کنید.

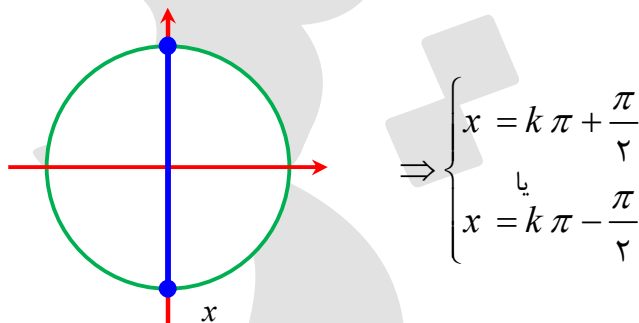
۱)  $\cos x = 1$



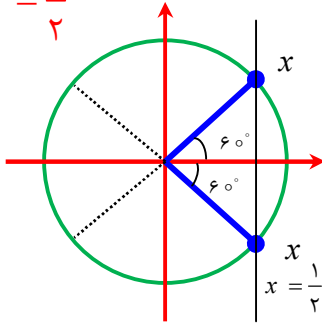
۲)  $\cos x = -1$



۳)  $\cos x = 0$



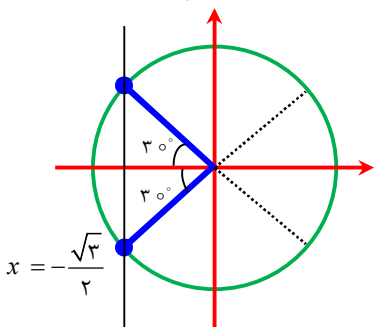
$$۴) \cos x = \frac{1}{2}$$



دو تا عقربه یک سر داریم که یکی  $\frac{\pi}{3}$  در جهت مثبت چرخیده و یکی دیگه در جهت منفی

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$۵) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



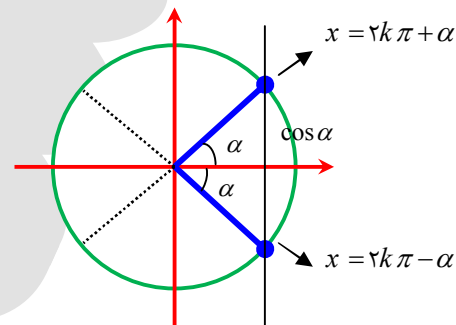
دو تا عقربه یک سر داریم که یکی  $\frac{5\pi}{6}$  در جهت

مثبت یکی دیگه  $\frac{5\pi}{6}$  در جهت منفی چرخیده

$$x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6}$$

در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$$



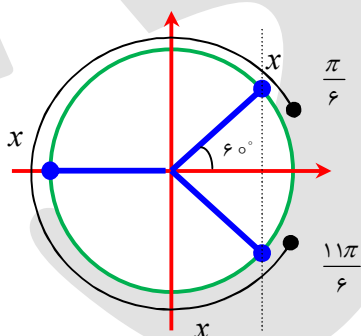
$$۱) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$۲) \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

سؤال ۱۸: جواب کلی معادله  $\sin x - 2\sin x \cos x = 0$  روی بازه  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right]$  کدام است.



$$\frac{2k\pi}{3} \quad (۲)$$

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{k\pi}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad (۳)$$

$$\sin x - 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (1 - 2 \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۱۹: معادله  $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$  را حل کنید. (تمرین کتاب درسی)

$$2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0 \Rightarrow (\cos x - 5)(2 \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 \text{ غ ق ق} \\ \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

•)  $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$  (تمرین کتاب درسی)

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

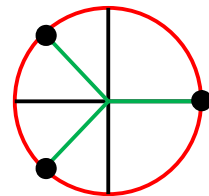
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

•)  $\cos x = \cos 2x$  (تمرین کتاب درسی)

$$\text{روش اول} \quad 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{روش دوم} \quad \cos x = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3}$$

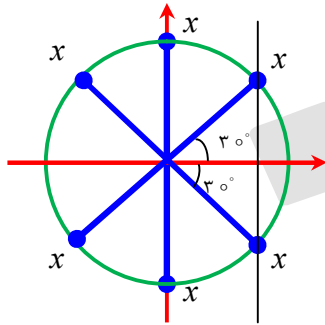


سؤال ۲۰: جواب کل معادله  $\cos 4x + \cos 2x = 0$  کدام است. (براساس کنکور ریاضی ۹۶)

$$\cos 4x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 2x - 1 + \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} \cos 2x = -1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} \end{cases}$$



$$\text{یا } \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۲۱: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی  $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  کدام است.

(تجربی خارج از کشور ۹۶)

$$5\pi \quad (4)$$

$$\frac{9\pi}{2} \quad (3)$$

$$4\pi \quad (2)$$

$$\frac{14\pi}{3} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x (2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = 0, \pi, 2\pi \\ 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

مجموع جواب ها

$$\rightarrow 0 + \pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

سؤال ۲۲: مجموع جواب های معادله ی  $1 + \cos^2 x = \sin^3 x$  در بازه ی  $(0, 2\pi)$  کدام است.

$$\frac{3\pi}{2} \quad (4)$$

$$\frac{5\pi}{2} \quad (3)$$

$$2\pi \quad (2)$$

$$3\pi \quad (1)$$

پاسخ: گزینه (۱)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^3 x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \cos^2 x + 1 \leq 2$$

بیشترین مقدار  $\sin^3 x$  برابر ۱ است و کمترین مقدار  $1 + \cos^2 x$  برابر ۱ است پس تساوی زمانی رخ می دهد که هر دو برابر ۱ شوند.

$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} & (1) \\ \cos^2 x + 1 = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \xrightarrow{0 < x < 2\pi} x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} & (2) \end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲):  $x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$  که جمعشان برابر  $3\pi$  می شود.

**سؤال ۱۳:** جواب های معادله  $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = 8$  بر روی دایره ی مثلثاتی رئوس کدام چند ضلعی می باشند.

(۱) هشت ضلعی منتظم

(۲) هشت ضلعی غیرمنتظم

(۳) شش ضلعی منتظم

(۴) شش ضلعی غیرمنتظم

پاسخ: گزینه (۱)

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = 8 \Rightarrow 8 \sin^2 x \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2(4 \sin^2 x \cos^2 x) = 1$$

$$\Rightarrow 2(2 \sin x \cos x)^2 = 1 \Rightarrow 2(\sin 2x)^2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

جواب های معادله فوق در بازه ی  $(0, 2\pi)$  و با توجه به  $x \neq \frac{k\pi}{2}$  برابر است با:  $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \right\}$

این نقاط تشکیل هشت ضلعی منتظم می دهند.

**سؤال ۱۴:** جواب کلی معادله  $(4 \cos^2 x - 1)^2 = 4$  کدام است؟

(۴)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

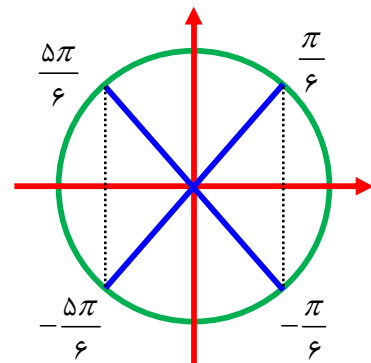
(۲)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$$(4 \cos^2 x - 1)^2 = 4 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 1 = \pm 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 1 = 2 \rightarrow 4 \cos^2 x = 3 \rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 4 \cos^2 x - 1 = -2 \rightarrow 4 \cos^2 x = -1 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$



جواب کلی:  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

گزینه (۳) درست است.

**سؤال ۱۵:** جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$  کدام است. (خارج تجربی ۹۵)

(۴)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۳)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

(۲)  $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

(۱)  $k\pi \pm \frac{\pi}{6}$



$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

دو کمان  $x + \frac{\pi}{4}$ ،  $\frac{\pi}{4} - x$  متمم یکدیگرند پس می توان به جای  $\sin$  یکی،  $\cos$  دیگری را نوشت:

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x \Rightarrow \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

سؤال ۲۶: جواب کلی معادله مثلثاتی  $\cos 3x + \cos x = 0$  با شرط کدام است؟ ( $k \in \mathbb{Z}$ ) (خارج تجربی ۹۴)

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cos x \neq 0} x \text{ نمی تواند } k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ باشد}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۲۷: مجموع جواب های معادله  $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (1 + \sin x) + \cos x + \sin x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow (1 + \sin x) + \cos x (1 + \sin x) = 0 \Rightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{3\pi}{2} \\ \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi \end{cases} \Rightarrow \pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

سؤال ۲۸: مجموع تمام جواب های معادله ی مثلثاتی  $\sin 4x = \sin^2 x - \cos^2 x$  در بازه ی  $[0, \pi]$  برابر کدام است؟

$$\frac{11\pi}{3} \quad (۴) \quad \frac{5\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{9\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{7\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\sin 4x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\sin 4x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = -\cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x (2 \sin 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \\ 2 \sin 2x + 1 = 0 \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in [0, \pi]} \pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب ها} : \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = 2\pi + \frac{6\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

سؤال ۲۹: مجموع جواب های معادله ی مثلثاتی  $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$  در بازه ی  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

$$\frac{7\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{3\pi}{2} \quad (۳) \quad \frac{5\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{3\pi}{4} \quad (۱)$$

(خارج از کشور ۹۵)

از آنجا که  $\sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$  بنابراین معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \xrightarrow{\cos(-u) = \cos u} \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{3\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

$$\xrightarrow[k=0]{x \in [0, 2\pi]} x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8}$$

گزینه (۱) درست است.  $\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{8} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$  مجموع جواب ها

سؤال ۳۰: تعداد جواب های معادله  $\sin(\pi \cos x) = -1$  در فاصله  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

$$\sin(\pi \cos x) = -1 = \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \pi \cos x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div \pi} \cos x = 2k - \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq 2k - \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2k \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{4\pi}{3} \end{cases} \text{ دو جواب دارد}$$

گزینه (۳) درست است.

سؤال ۳۱: معادله مثلثاتی  $2 \cos^2 x + \cos x = 1$  نقاط پایانی تمام جواب ها بر دایره ی مثلثاتی رأس های کدام

شکل هندسی است.

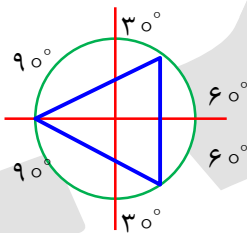
مستطیل (۴)

دوزنقه (۳)

مثلث قائم الزاویه (۲)

مثلث متساوی الاضلاع (۱)

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = (2k+1)\pi \end{cases}$$



نوع مثلث متساوی الاضلاع است زیرا کمان روبه رو به

هر زاویه ی مثلث  $120^\circ$  است و هر کدام از زاویه های

مثلث می شوند  $60^\circ$  پس گزینه (۱) درست است.

سؤال ۳۲: نقاط پایانی کمان جواب های معادله  $\frac{\sin x \cos x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$  روی دایره ی مثلثاتی رأس های کدام چند

ضلعی اند؟ (خارج از کشور ریاضی ۹۱)

مثلث متساوی الاضلاع (۴)

مثلث قائم الزاویه (۳)

مستطیل (۲)

مربع (۱)

با شرط  $\cos x \neq 1$  طرفین وسطین می کنیم:

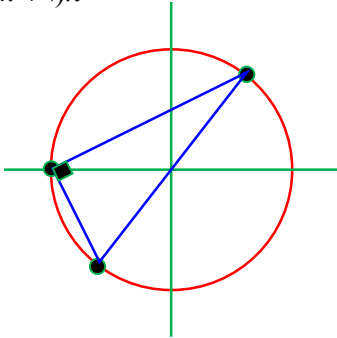
$$\sin x \cos x = (1 - \cos x)(1 + \cos x) = 1 - \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x (\cos x - \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

اما توجه شود که در مضارب زوج  $\cos x, \pi$  برابر یک می شود پس  $x$  در مضارب زوج  $\pi$  قرار ندارد.

$$x = (2k+1)\pi$$



و اگر  $\cos x - \sin x = 0$  نتیجه می شود که  $\cos x = \sin x$  که مکان هندسی آن همان نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است حالا نقاط را روی دایره‌ی مثلثاتی نشان می دهیم.

این سه نقطه تشکیل یک مثلث می دهند از آنجایی که بزرگترین

ضلع این مثلث قطر دایره است که کمان  $180^\circ$  روی دایره جدا

می کند پس زاویه‌ی محاطی روبرو به آن می شود نصف  $90^\circ$

یعنی  $90^\circ$  پس مثلث داده شده قائم الزاویه است. گزینه (۳)

سؤال ۳۳: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی  $(4 \sin x + \tan x) \cot x = 2 \cos 2x$  کدام است؟ (خارج از کشور ریاضی)

$$(4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$(3) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$(2) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$(1) \quad k\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\cot x(4 \sin x + \tan x) = 4 \cot x \cdot \sin x + \cot x \cdot \tan x = 4 \cos x + 1$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 \Rightarrow 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{3}{2} \rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ گزینه (3) درست است.}$$

سؤال ۳۴: جواب کلی معادله‌ی  $\cos^3 x \cos x = \cos^2 x$  کدام است؟

$$(4) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$(3) \quad k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad k\pi$$

$$(1) \quad \frac{k\pi}{2}$$

$$\cos^3 x \cos x = \cos^2 x \Rightarrow \cos^3 x \cos x - \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos^3 x - \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ \cos^3 x = \cos x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (2k+1)\frac{\pi}{2} & (1) \\ 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi & (2) \\ 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$(1) \cup (2) \cup (3) = \frac{k\pi}{2} \text{ گزینه (1) درست است.}$$

سؤال ۳۵: جواب کلی معادله‌ی  $4 \cos x \sin^2 x = \frac{1}{2} + \cos x$  کدام است.

$$(4) \quad k\pi \pm \frac{2\pi}{9}$$

$$(3) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$$

$$(2) \quad \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$$

$$(1) \quad \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

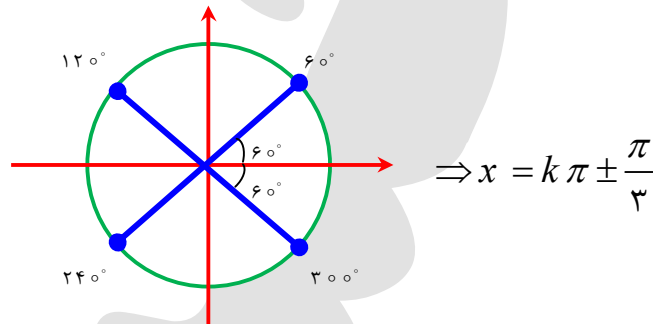
$$4 \cos x \sin^3 x = \frac{1}{2} + \cos x \Rightarrow 4 \cos x (1 - \cos^2 x) = \frac{1}{2} + \cos x \Rightarrow 4 \cos x - 4 \cos^3 x = \frac{1}{2} + \cos x$$

$$\Rightarrow 3 \cos x - 4 \cos^3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos^3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^3 x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9} \text{ گزینه (۱) درست است.}$$

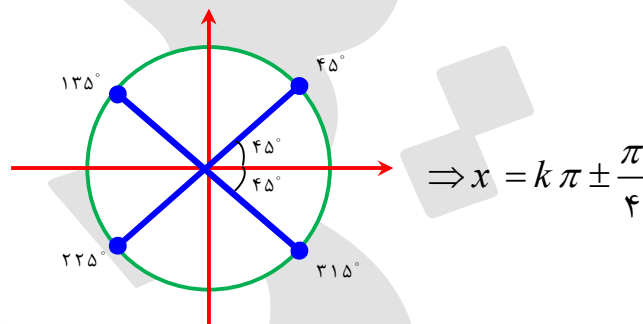
سؤال ۳۶: جواب کلی معادله  $\sin^3 x = \frac{3}{4}$  را بدست آورید.

$$\sin^3 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



سؤال ۳۷: جواب کلی معادله  $\cos^3 x = \frac{1}{2}$  را بدست آورید.

$$\cos^3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



در حالت کلی می توان نشان داد:

$$\left. \begin{array}{l} \sin^3 x = \sin^3 \alpha \\ \cos^3 x = \cos^3 \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$$

سؤال ۳۸: جواب کلی معادلات مثلثاتی  $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$  کدام است. (داخلی تجربی ۹۶)

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۱) \quad 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۲) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۴)$$

$$\cos 2x + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

سؤال ۳۹: جواب کلی معادله  $\tan^2 x \cot x + \cos 2x = 1$  کدام است.

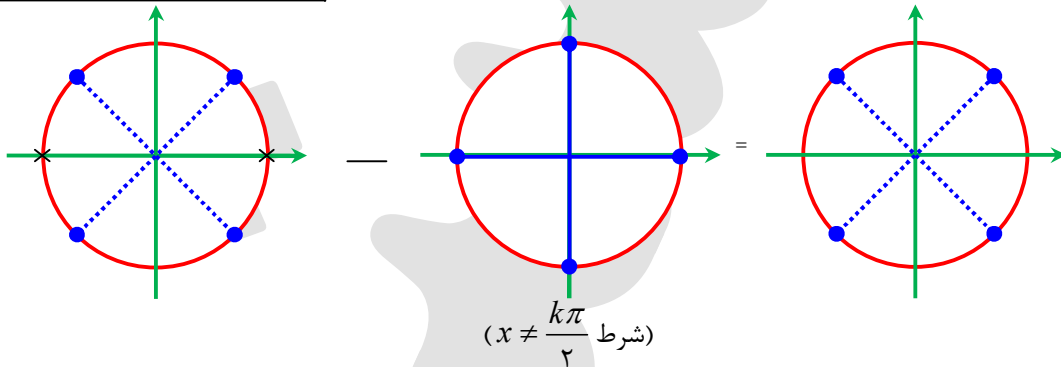
$$k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{4} \quad (۱)$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1, x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \tan^2 x \underbrace{(\tan x \cdot \cot x)}_1 + \cos 2x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \tan^2 x = 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2\sin^2 x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \cos^2 \alpha \rightarrow x = k\pi \pm \alpha}$$



$$\text{جواب کلی} = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

سؤال ۴۰: نمودار تابع روی بازه  $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$  روی بازه  $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$  در چند نقطه محور  $x$  ها را قطع می کند. (خارج تجربی ۹۱)

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$$-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -3\pi \leq -2x \leq 2\pi \Rightarrow -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq \underbrace{-2x + \frac{\pi}{4}}_u \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

حال باید جواب معادله  $\sin u = 0$  را بیابیم:  $u = k\pi$

$$\Rightarrow -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq k\pi \leq 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$-3 + \frac{1}{4} \leq k \leq 2 + \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{11}{4} \leq k \leq \frac{9}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0, 1, 2 \text{ پنج جواب دارد.}$$

سؤال ۴۱: نمودار تابع  $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$  روی بازه  $[-1, 1]$  در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟

(سراسری تجربی ۹۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$-1 \leq \cos u \leq 1 \rightarrow -1 \leq -\cos u \leq 1 \rightarrow -4 \leq -4 \cos u \leq 4$$

پس بیشترین مقدار  $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$  برابر ۴ است.

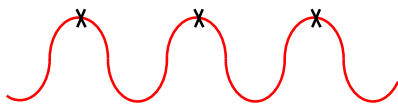
$$-4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -4 \cos\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$$

$$\Rightarrow \cos\left(3\pi x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 = \cos \pi \Rightarrow 3\pi x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi$$

$$\Rightarrow 3\pi x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k}{3} + \frac{5}{12} \xrightarrow{x \in [-1, 1]} -1 \leq \frac{2k}{3} + \frac{5}{12} \leq 1 \xrightarrow{\times 12} -12 \leq 8k + 5 \leq 12$$

$$\Rightarrow -17 \leq 8k \leq 7 \Rightarrow -\frac{17}{8} \leq k \leq \frac{7}{8} \Rightarrow -2 \dots \leq k \leq 0 \dots \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0$$

روش حل حرفه ای ها: دوره‌ی تناوب تابع  $T = \frac{2\pi}{3\pi} = \frac{2}{3}$  است پس در فاصله‌ی  $[-1, 1]$  سه بار تکرار می‌شود زیرا طول بازه ۲



است و  $2 = 3 \left(\frac{2}{3}\right)$  یعنی و چون  $y(\pm 1) \neq \pm 4$  است می‌توان شکل فرضی مقابل را

برای آن در نظر گرفت که واضح است در سه نقطه بیشترین مقدار را دارد.

راه حل سوم)

برای آنکه تابع  $y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$  به بیشترین مقدار خود برسد باید  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right) = -1$  شود. برای حل این معادله

ابتدا  $\frac{\pi}{4} - 3\pi x$  را  $u$  می‌گیریم و حدود  $u$  را با توجه به محدوده‌ی  $x$  می‌سازیم:

$$-1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\times (-3\pi)} -3\pi \leq -3\pi x \leq 3\pi \xrightarrow{+\frac{\pi}{4}} -3\pi + \frac{\pi}{4} \leq -3\pi x + \frac{\pi}{4} \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

حال باید جواب معادله  $\cos u = -1$  را بیابیم:  $u = 2k\pi + \pi$

$$-3\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi \leq 3\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$-3 + \frac{1}{4} \leq 2k + 1 \leq 3 + \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -1, 0, 1$$