فصل ۵

کاربردهای مشتق

گردنه حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل، با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس بر نمودار مکان زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

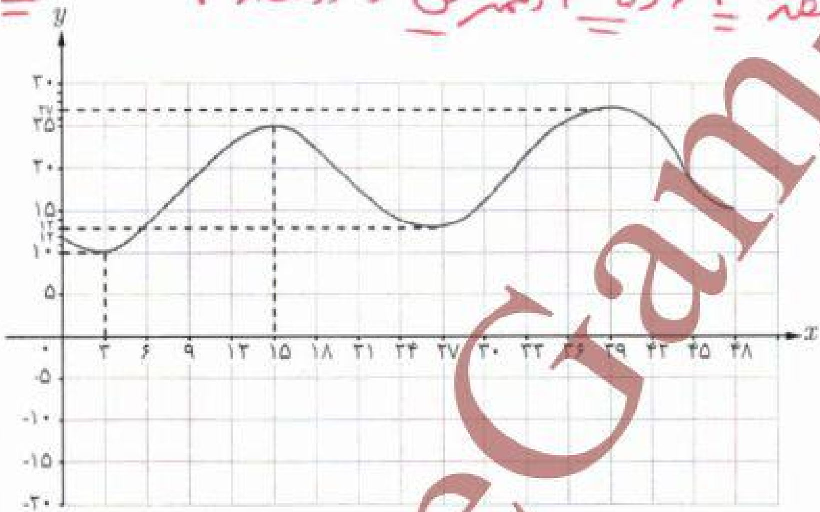
@GamBeGamDarsi

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟

در نقطه ۳ ، دما ۱۰ کمترین و در نقطه ۳۹ ، دما ۲۷ و بیشترین



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.

نقاط به طول ۳ و ۲۷ به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

@GamBeGam-Darsi

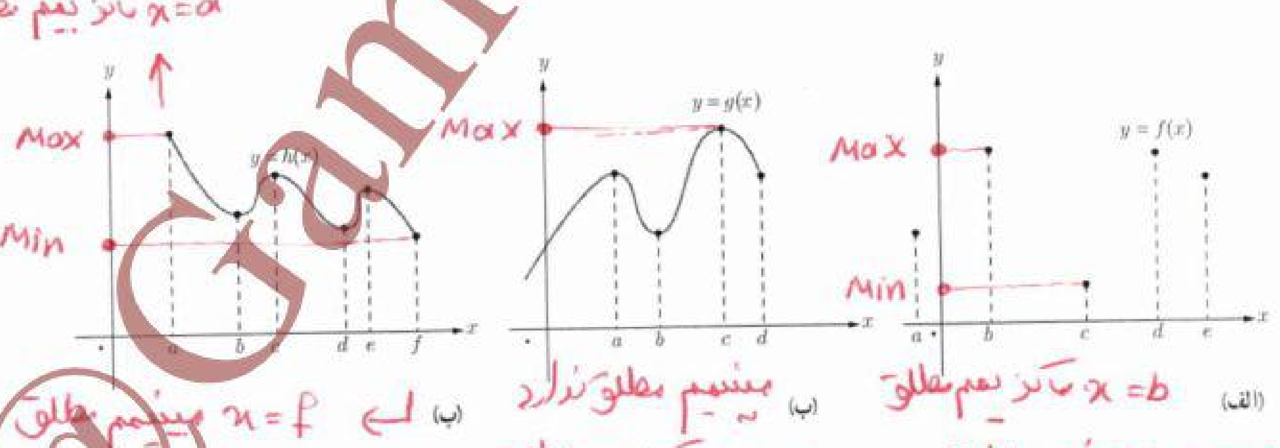
دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۱۵ , ۲۵) و (۳۹ , ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۵$ و $x = ۳۹$ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۳ , ۱۰) و (۲۷ , ۱۳) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x = ۱۰$ و $x = ۱۳$ اتفاق افتاده‌اند.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه I «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه I به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است. به عبارتی برای هر $x \in I$ داریم $f(x) \leq f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a , f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

✤ تذکر : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.

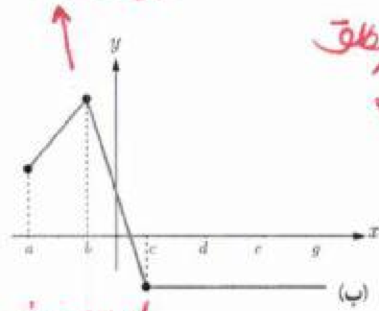


(الف)
x=b ماکزیمم مطلق
x=c ⇐ مینیمم مطلق

(ب)
مینیمم مطلق ندارد
x=c ، ماکزیمم مطلق

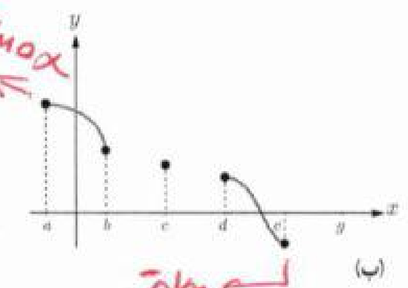
(پ)
مینیمم مطلق x=f ⟵

۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.


(پ)

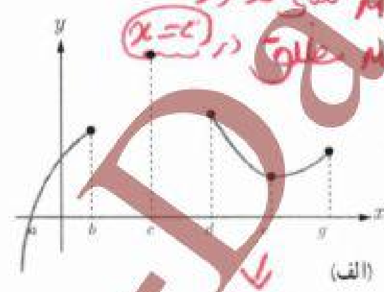
Max مطلق و نسبی

min مطلق و نسبی


(ب)

Max مطلق

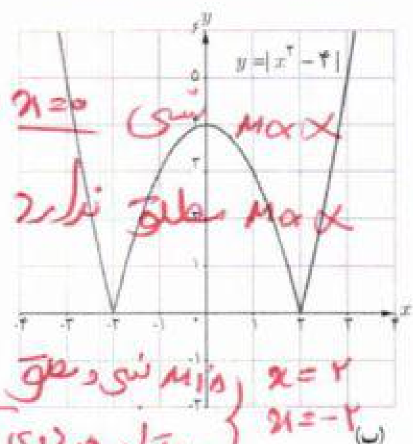
min مطلق


(الف)

Max نسبی ندارد در $x=c$ Max مطلق

min نسبی، min مطلق ندارد

۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.

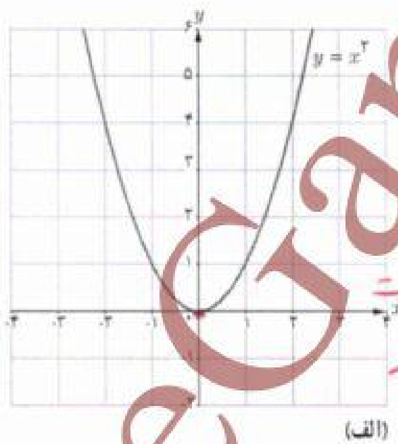


(ب)

$x=0$ و برابر ۴ Max نسبی

Max مطلق ندارد

$x=2$، $x=-2$ min نسبی و مطلق و مقدار هردوی آنها صفر است



(الف)

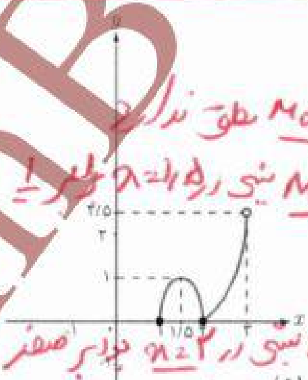
$x=0$ min نسبی، min مطلق و مقدار برابر صفر است

Max نسبی و مطلق ندارد


(ث)

ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد

min مطلق (۳,۱-) است

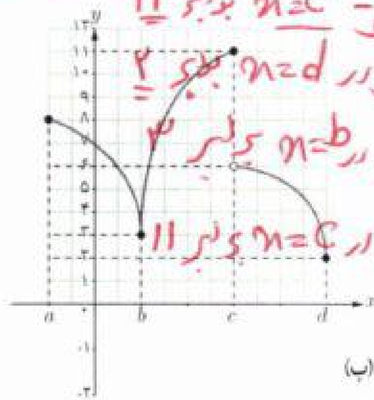

(ت)

Max مطلق ندارد

Max نسبی در $x=1/5$ برابر ۱

min نسبی در $x=2$ برابر صفر

min مطلق در $x=1$، $x=2$ برابر صفر


(پ)

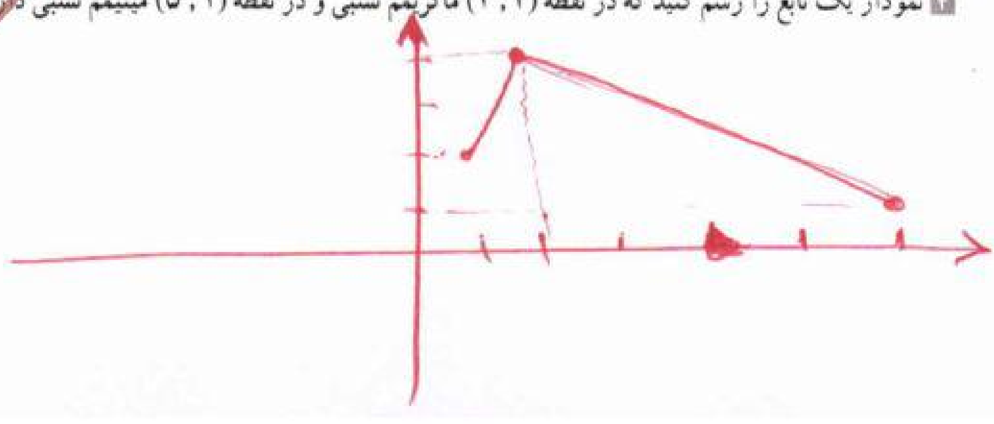
Max مطلق در $x=c$ برابر ۱۱

min مطلق در $x=d$ برابر ۲

min نسبی در $x=b$ برابر ۳

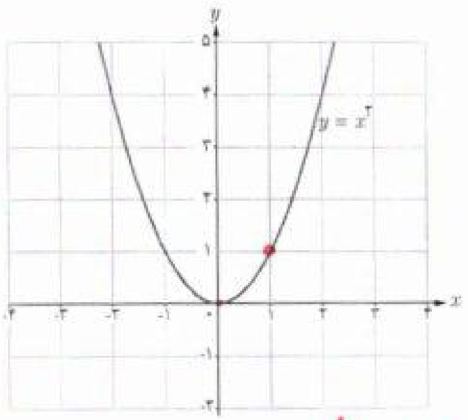
Max نسبی در $x=c$ برابر ۱۱

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۲, ۴) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۵, ۱) مینیمم نسبی دارد.



@GamBeGam-Darsi

ب) در $x=0$ یعنی $(0,0)$ Min مطلق دارد اما ماکزیمم مطلق ندارد.



۲ تابع $f(x)=x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0, 1]$ و $(0, 1)$ بررسی کنید.

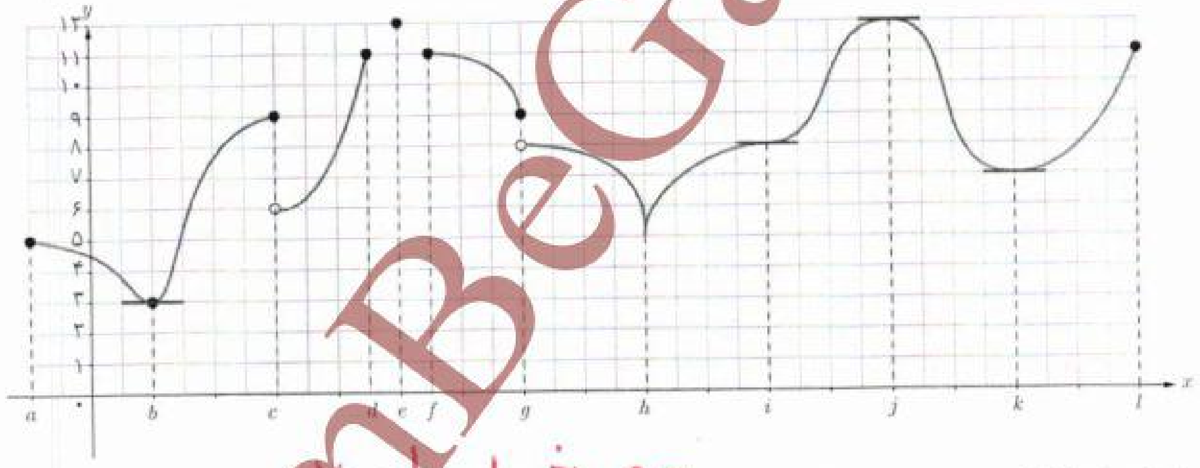
ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

الف) در $[0,1]$ ، Min مطلق برای 0 و Max مطلق برای 1

در $(0,1)$ ، Min و Max مطلق ندارد.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید. c و j ، b ، h ، k

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید. a و c و d و e و f و g و h و l

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید. b و i و j و k

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟ خیر

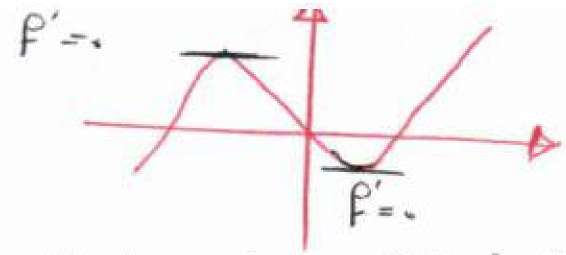
ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟ صفر

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟ بله (نقطه i)

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟ بله

در نقطه‌ی e

@GamBeGam-Darsi



۲

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟ $f' = ۰$

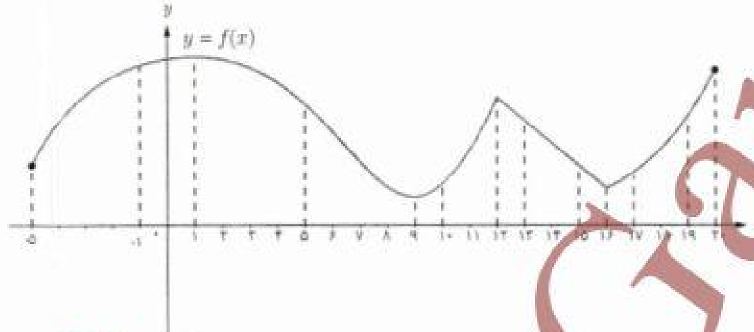
۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست. نادرست

ب) اگر $f'(c) = ۰$، آنگاه $x = c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است. نادرست

پ) اگر $x = c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = ۰$. درست

فعالیت



۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع پیوسته را نشان می‌دهد.

الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های بستهٔ زیر بررسی کنید.

$[-۱, ۰]$ ، $[۵, ۱۰]$ ، $[۱۳, ۱۵]$ ، $[۱۰, ۱۳]$ ، $[۱۶, ۲۰]$

$[۱۶,۲۰]$	$[۱۰,۱۳]$	$[۱۳,۱۵]$	$[۵,۱۰]$	$[-۱,۰]$
مطلق Min ، مطلق Max	مطلق Max $x=۱۲$ ، مطلق Min	مطلق Max ، مطلق Min	مطلق Min $x=۹$ ، مطلق Max	مطلق Min و مطلق Max

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در بازه‌های باز زیر بررسی کنید.

$(۱۶, ۲۰)$	$(۱۰, ۱۳)$	$(۱۳, ۱۵)$	$(۵, ۱۰)$	$(-۱, ۰)$
وجود ندارد	مطلق Min ندارد ، $x=۱۲$ مطلق Max	وجود ندارد	$x=۹$ مطلق Min ، مطلق Max ندارد	وجود ندارد

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است. درست

ب) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است. نادرست

قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

> قضیه: اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a, b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

@GamBeGam-Darsi

با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در «نقاط ابتدا و انتهای بازه»، یا در «اکسترمم‌های نسبی تابع» و یا در «نقاطی که تابع در آنها مشتق‌پذیر نیست» اتفاق می‌افتند. از طرفی دیدیم که در اکسترمم‌های نسبی یا «مشتق تابع وجود ندارد» و یا «مشتق وجود دارد و برابر صفر است». بنابراین اکسترمم‌های مطلق تابع را باید در بین نقاطی بررسی کنیم که یکی از سه ویژگی زیر را داشته باشند :

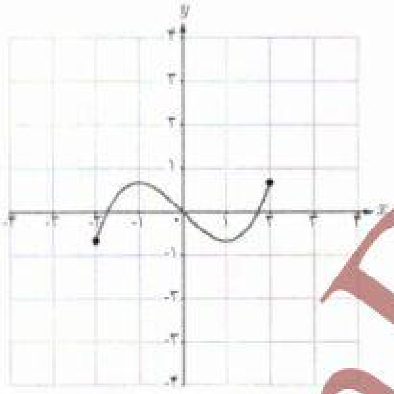
۱ نقاطی که مشتقِ تابع در آنها وجود ندارد.

۲ نقاطی که مشتق در آنها برابر صفر است.

۳ نقاط ابتدایی و انتهایی بازهٔ مورد نظر.

مجموعهٔ حاصل از اجتماع نقاط دو دستهٔ (۱) و (۲) را «**نقاط بحرانی**» می‌نامیم؛ «به عبارتی نقاط بحرانی نقاطی از دامنهٔ تابع هستند که مشتق تابع در آنها وجود ندارد و یا وجود دارد و برابر صفر است.» برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ را در بازهٔ $[-2\,,\,2]$ بیابید.



حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم.

بنابراین باید در بازهٔ $(-2\,,\,2)$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-2\,,\,2)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^2-1$ و مقدار f' در $x=\pm 1$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(1)=0$ و $f'(-1)=0$.

بنابراین $x=\pm 1$ طول نقاط بحرانی و $x=\pm 2$ طول نقاط انتهایی بازه هستند و از آنجا که داریم :

$$f(-2)=-\frac{2}{3} \qquad f(-1)=\frac{2}{3} \qquad f(1)=-\frac{2}{3} \qquad f(2)=\frac{2}{3}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-1$ و $x=2$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=1$ و $x=-2$ است.

@GamBeGam-Darsi

✤ مثال : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^2-1|$ را روی بازه $[-2\,,2]$ پیدا کنید.

✤ حل : نقاط $x=\pm 2$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

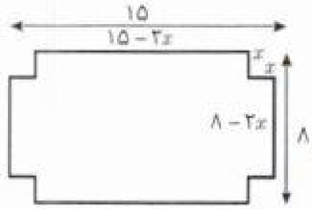
$$f(x)=|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & x\le -1 \ \text{یا}\ 1\le x \\ 1-x^2 & -1\le x\le 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \ \text{یا}\ 1<x \\ -2x & -1<x<1 \end{cases}$$

حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت :

$$f'_+(1)=2 \quad , \quad f'_-(1)=-2 \quad , \quad f'_+(-1)=2 \quad , \quad f'_-(-1)=-2$$ و

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm 1$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=0$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=0$ و $x=\pm 1$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط و نقاط انتهایی بازه، به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm 1$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm 2$ و مقدار آن برابر ۳ است.

در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می‌خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.



✤ مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[1] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟

✤ حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

طول قوطی مورد نظر $= 15-2x \qquad 0\le x\le \frac{15}{2}$

عرض قوطی $= 8-2x \qquad 0\le x\le 4$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(15-2x)(8-2x)=4x^3-46x^2+120x \ , \ 0\le x\le 4$$

۱ـ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

@GamBeGam-Darsi

چون V روی $[0 , 4]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

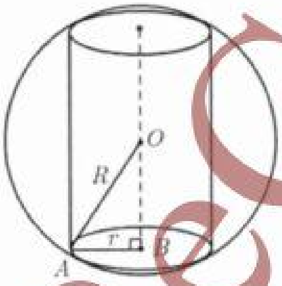
$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

$$(3x-5)(x-6) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad \text{یا} \quad x = 6$$

اما $x = 6$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست و $x = \frac{5}{3}$ تنها نقطه بحرانی تابع است. از طرفی $V(0) = 0$، $V(4) = 0$ و $V(\frac{5}{3}) > 0$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x = \frac{5}{3}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{5}{3}$ اینچ باشد.

مثال : در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل : فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB، $OB = \frac{h}{2}$ و داریم :



$$AB^2 + OB^2 = OA$$

بنابراین $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$.

حجم این استوانه برابر است با :

$$V = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h \Rightarrow V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4}h^3 \quad ; \quad 0 \le h \le 2R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[0 , 2R]$، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم :

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

از طرفی $V(0) = 0$ و $V(2R) = 0$.

بنابراین تابع V به ازای $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$، مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$ می‌باشد.

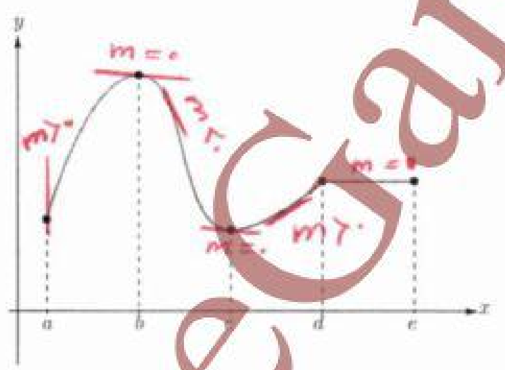
@GamBeGam-Darsi

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

$m = 0 \in \{b, c\}$

$m > 0 \begin{cases}(a, b)\\(c, d)\end{cases}$ و در (b, c) شیب منفی

$m = 0 \in (d, e)$ در بازه‌ی

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

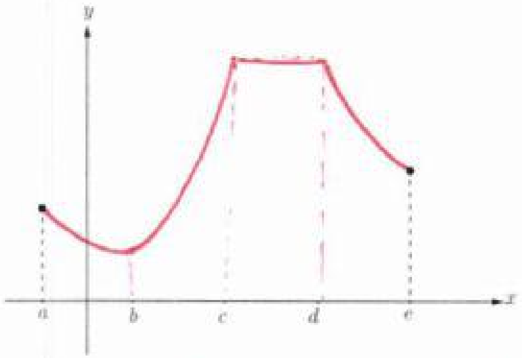
در $\begin{cases}(a, b)\\(c, d)\end{cases}$ $f' > 0$ و $\in (b, c)$ $f' < 0$ و در نقاط $\{b, c\}$ و بازه‌ی (d, e) $f' = 0$

پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی مقدار تابع f ثابت است.

در بازه‌های (a, b) و (c, d) اکیداً صعودی و در بازه‌ی (b, c) اکیداً نزولی

و در بازه‌ی (d, e) تابع ثابت

@GamBeGam_Darsi



۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازهٔ $[a , e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد:

ـ تابع f در بازهٔ (a , e) مشتق‌پذیر باشد.

ـ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a , b) و (b , c) و (c , d) و (d , e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ـ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.

در بازهٔ (b , c) صعودی در بازه‌های (a , b) و (d , e) نزولی و در بازهٔ (c , d) تابع ثابت

با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a , b]$ پیوسته و بر بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در (a , b)، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ نزولی اکید است.

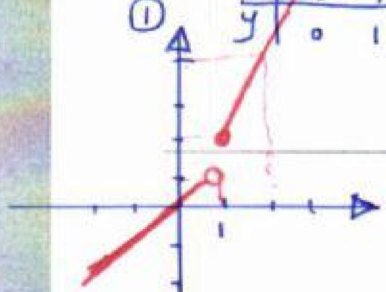
پ) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ یک تابع ثابت است.

①

x	۰	۱	۱	۲
y	۰	۱	۲	۴

②

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
y	۸-	۱-	۰	۱	۸



کار در کلاس

۱ توابع $f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

(الف) ۱ ②

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟ خیر

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟ بله

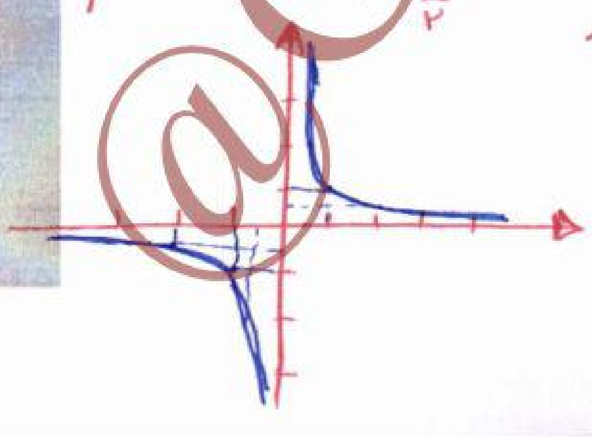
x	۱-	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۲
y	۱-	۲-	×	۲	۱	$\frac{1}{2}$

۲ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty , 0)$ و $(0 , +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟ خیر

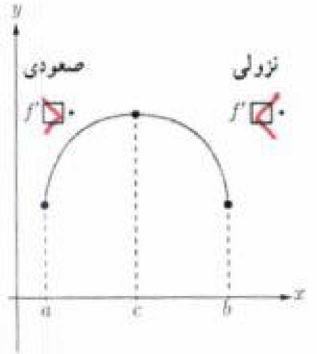
در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.



@GamBeGam-Darsi

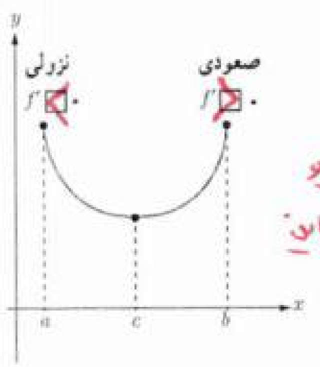
فعالیت

فرض کنیم $c \in (a\,,b) \subseteq D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و f بر $(a\,,b)$ پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.



۱ اگر تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,c)$ در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند $(c\,,b)$ در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c مشخص نمایید.



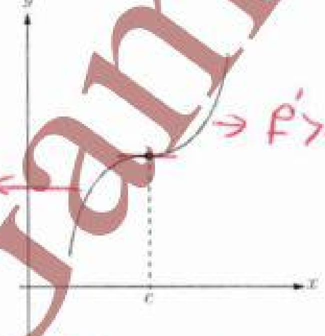
۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

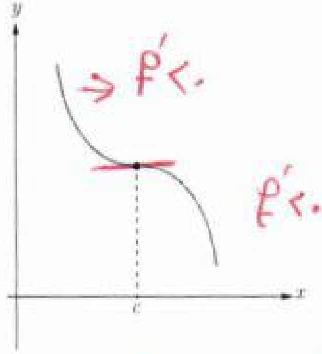
اگر تابع f در بازه‌ای مانند (a,c) در سمت چپ آن نزولی و در بازه‌ای مانند (c,b) و در سمت راست آن صعودی باشد در این صورت $\underline{x=c}$ یک نقطه‌ی مینیمم نسبی تابع f است

۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c)=0$.

الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟





نقاط اکسترمم ندارند زیرا علامت f' در شکل‌های الف و ب در دو طرف نقطه‌ی $\underline{x=c}$ یکسان می‌باشد

@GamBeGam-Darsi

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)>۰$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)<۰$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)<۰$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)>۰$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^۳-۲x^۲-۴x+۶$ را در بازهٔ $[-۳,۴]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل : از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x)=۳x^۲-۴x-۴ \qquad f'(x)=۰ \Rightarrow x=۲ \quad \text{یا} \quad x=-\frac{۲}{۳}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x=۲$ و $x=-\frac{۲}{۳}$ است و نقاط $x=-۳$ و $x=۴$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم :

$$(-۳,-۲۷)\ ,\ \left(-\frac{۲}{۳},\frac{۲۰۲}{۲۷}\right)\ ,\ (۲,-۲)\ ,\ (۴,۲۲)$$

لذا $x=۴$ و $x=-۳$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم :

x		$-\frac{۲}{۳}$		۲	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

@GamBeGam-Darsi

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}\,,\,۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر -۲ است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	-۳		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		+	۰	−	۰	+	
f	-۲۷	↗	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	↘	-۲	↗	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

کار در کلاس

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است. در بازه‌های (a,s) و (t,b) تابع صعودی و در بازهٔ (a,b)

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید. تابع نزولی و همچنین در بازهٔ (d,e)

تابع نزولی نمی‌باشد

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

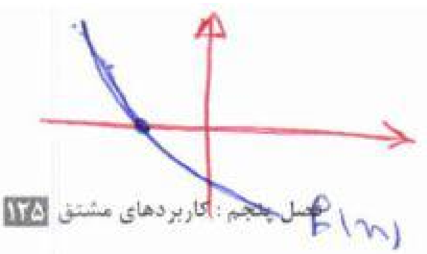
پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟ بله زیرا تابع در این بازه تابع ثابت می‌باشد

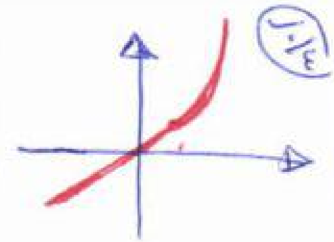
ب) در $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد و نقاط $x=a,b,c,d,e$ بحرانی هستند

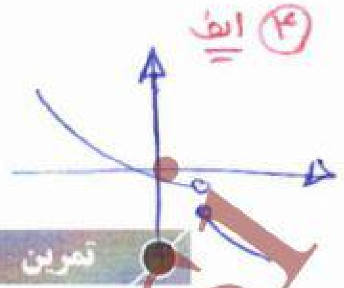
زیرا مشتق در این نقاط صفر می‌شود

و در $x=b$ مینیمم نسبی

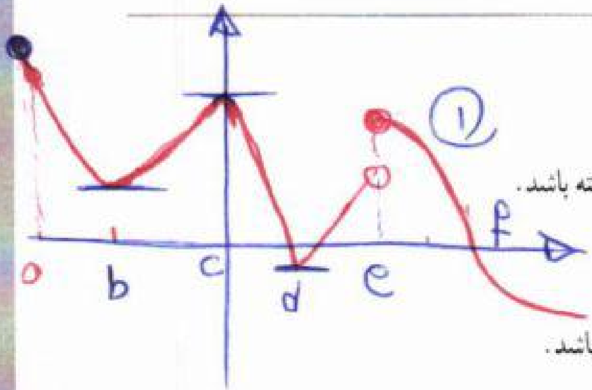
@GamBeGam-Darsi







تمرین



۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.

نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع نقطهٔ بحرانی نباشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

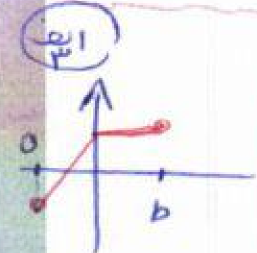
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

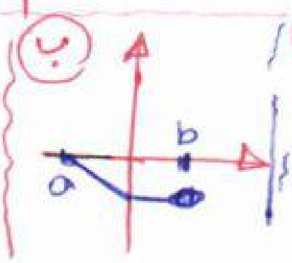
۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

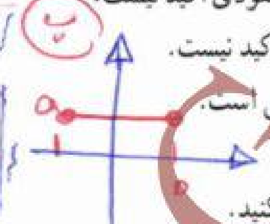
الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ هم صعودی و هم نزولی است.





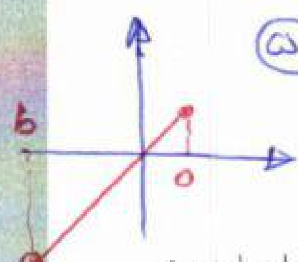


۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.

پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.



۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید و نقاط بحرانی این توابع را به‌دست آورید.

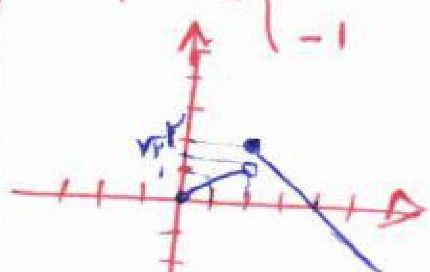
الف) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \qquad [-2 , 1]$

ب) $f(x) = x^3 - 3x \qquad [-1 , 2]$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \le x < 2 \\ 4 - x & x \ge 2 \end{cases}$

پ) $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 < x < 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$

بحرانی، نسبی Max



x		0		2	
f'		∄	+	∄	−
f			↗		↘

الف) $f'(x) = 6x - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$x = -2 \Rightarrow y = 12 + 4 + 5 = 21 \rightarrow$ Max مطلق

$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 5 = \frac{14}{3} \Rightarrow$ Min مطلق

$x = 1 \Rightarrow y = 3 - 2 + 5 = 6$

ب) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

$x = -1 \Rightarrow y = -1 + 3 = +2 \Rightarrow$ مطلق Max

$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 3 = -2 \Rightarrow$ مطلق Min

$x = 2 \Rightarrow y = 8 - 6 = 2 \Rightarrow$ مطلق Max

@GamBeGam_Darsi

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-1)=5 \quad , \quad f(4)=-2 \quad , \quad f(0)=0$$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy=100\,cm^2$ و $h=2\,cm$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

الف) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$

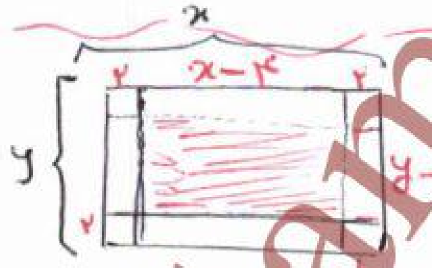
ب) $f(x)=\frac{x}{x-2}$

(۷)

$(1,2) \xRightarrow{\text{جایگذاری}} 1+a+b=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1} \Rightarrow -3+b=1 \Rightarrow b=4$

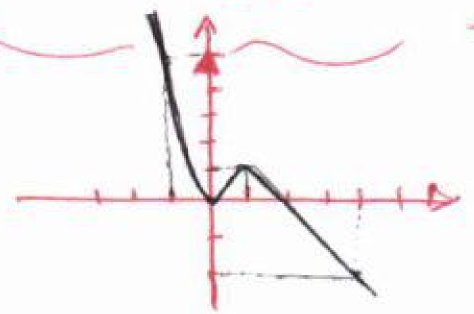
$f'(x)=3x^2+a \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3+a=0 \Rightarrow a=-3$

(۹)



$\begin{cases} xy=100 \\ y=\frac{100}{x} \end{cases}$

(۸)



$V=2(x-4)(y-4)=2xy-8x-8y+32$

$V(x)=232-8x-\frac{800}{x}$

$V(x)=\frac{232x-8x^2-800}{x}$

$V'(x)=\frac{(232-16x)(x)-1(232x-8x^2-800)}{x^2}$

$\Rightarrow V'(x)=\frac{-8x^2+800}{x^2}=0$

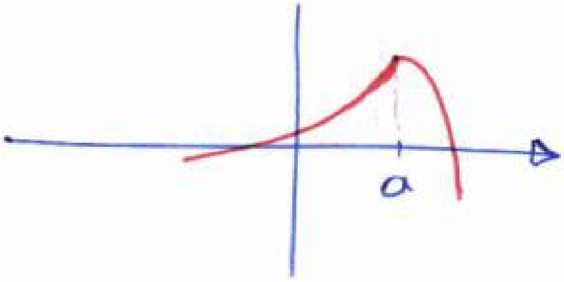
$\Rightarrow x^2=100 \Rightarrow x=10$

$\Rightarrow y=10$

@GamBeGam-Darsi

حل تمرین ص ۱۳۶/۱

سؤال ۱



۲

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+4 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$f'(x)=x^2-3 \Rightarrow f''(x)=2x=0 \Rightarrow x=0$

x		0	
f''	$-$		$+$
	تقعر به سمت پایین		تقعر به سمت بالا

ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$D=\mathbb{R}-\{1\} \qquad \Rightarrow f''(x)=\frac{0+4(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}>0$

x		1	
	$-$ ⌒		$+$ ⌣

پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} \Rightarrow f''(x)=\frac{0-3\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}\right)}{\left(3\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)^2}$

$D=\mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{3(x+1)^{\frac{5}{3}}} <$

$x+1=0 \Rightarrow x=-1$

x		-1	
f''	$+$ ⌣	ت.ن	$-$ ⌒
f		0	

۳

$f(x)=ax^3+bx^2+c \xrightarrow{f(0)=1} 0+0+c=1 \Rightarrow \boxed{c=1}$

$\xrightarrow{f(1)=2} a+b+1=2 \Rightarrow \boxed{a+b=1}$

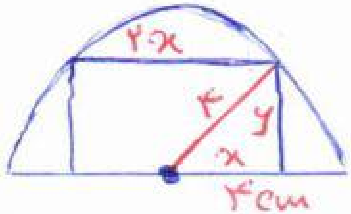
عطف $x=\frac{1}{2} \Rightarrow f''(\frac{1}{2})=0 \Longrightarrow f''(x)=6ax+2b \Rightarrow 6a(\frac{1}{2})+2b=0$

$\Rightarrow 3a+2b=0$

$$\begin{cases} -2)\ a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ a+b=1 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

@GamBeGam-Darsi

حل تمرین ۱۲۶/۲



۱۰

$x^2+y^2=r^2=16$

$\Rightarrow y^2=16-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{16-x^2}$

$S(x)=2xy=2x\sqrt{16-x^2}$

$\Rightarrow S'(x)=2\sqrt{16-x^2}+\dfrac{2x(-2x)}{2\sqrt{16-x^2}}=\dfrac{2(16-x^2)-2x^2}{\sqrt{16-x^2}}$

$\Rightarrow S'(x)=\dfrac{32-4x^2}{\sqrt{16-x^2}}=0 \Rightarrow 4x^2=32 \Rightarrow x^2=8$

$\Rightarrow x=\sqrt{8} \Rightarrow x=2\sqrt{2} \Rightarrow y=\sqrt{8}$

۱۱

الف

$f(x)=2x^3-3x^2-12x+7$

$f'(x)=6x^2-6x-12 = x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right.$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

در بازه‌ها $(-\infty,-1)$ و $(2,+\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $(-1,2)$ نزولی

ب

$f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ $\quad D=\mathbb{R}-\{2\}$

$f'(x)=\dfrac{1(x-2)-1(x)}{(x-2)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-2}{(x-2)^2}<0$

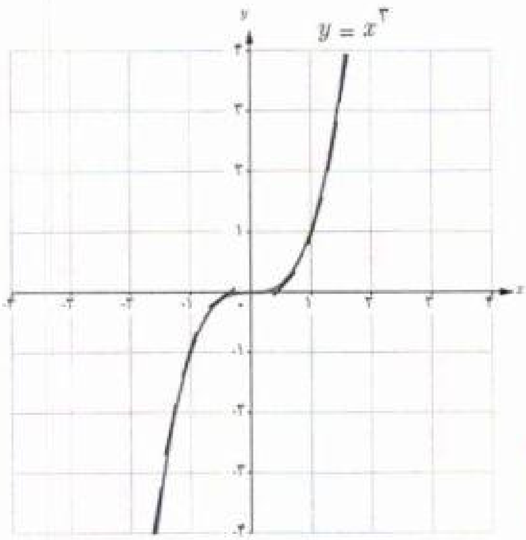
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−		−	
f		نزولی	0	نزولی	

در $R-\{2\}$ تابع در تمام نقاط دامنه نزولی می‌باشد

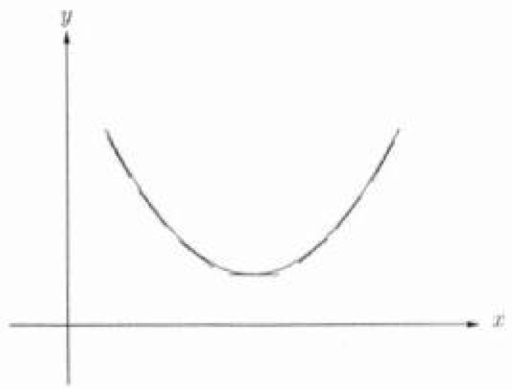
@GamBeGam-Darsi

درس ۲

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن



با تابع $f(x) = x^3$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = 3x^2$ در $x = 0$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = 0$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.



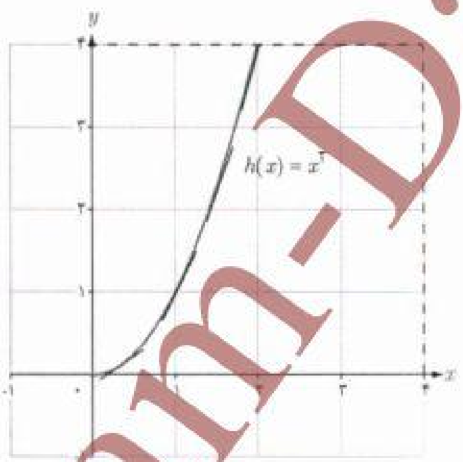
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.

مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.

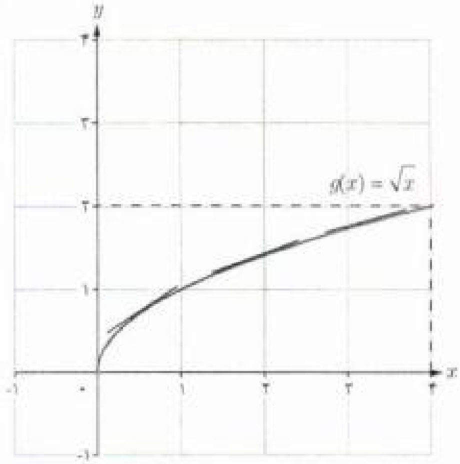
@GamBeGam-Daisi

فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0,+\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(الف)



(ب)

۱ با حرکت از نقطهٔ $x=0$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

در شکل الف شیب زیاد می‌شود اما در شکل (ب) شیب کم می‌شود در الف تقعر به سمت بالا در (ب) پایین

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

در این نمودارها اگر جهت تقعر به بالا باشد شیب افزایش و اگر تقعر به سمت پایین شیب کاهش

۳ تابع h' در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ صعودی

تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

× ۴ تابع g' در بازهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟ نزولی

۵ الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I صعودی است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I نزولی است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I صعودی است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I نزولی است.

@GamBeGam-Darsi

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید :

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه ...صعودی... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ...افزایش... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ...بالا... است.

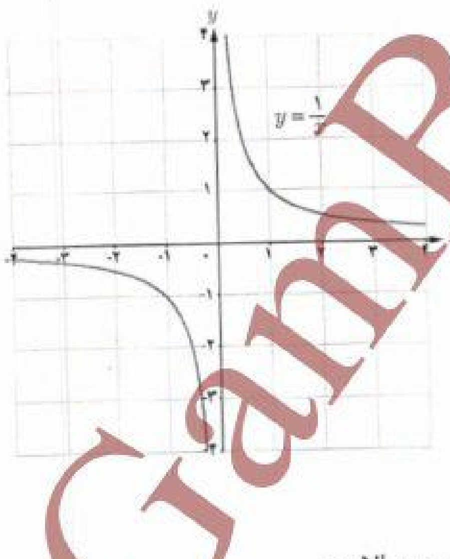
ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه ...نزولی... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه ...کاهش... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به ...پایین... است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نیست.

> قضیه :
> فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.
>
> الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.
> ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.
> پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

✣ مثال : جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$



ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

✣ حل : الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

بنابراین :

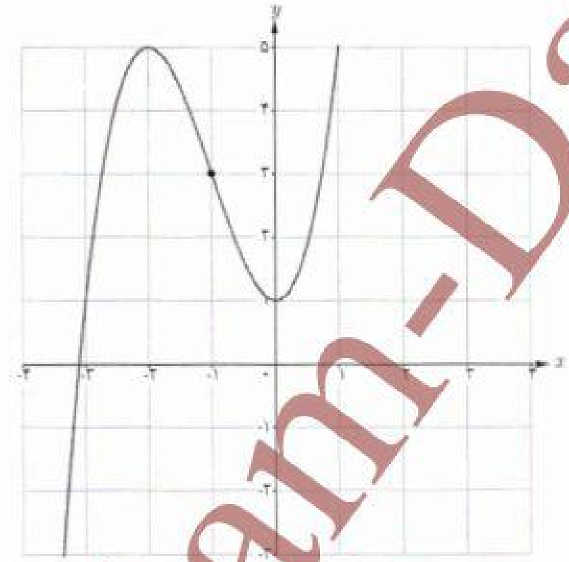
اگر $x > 0$، آنگاه $f''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(0, +\infty)$ رو به بالاست.
اگر $x < 0$، آنگاه $f''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty, 0)$ رو به پایین است.

@GamBeGam-Darsi

ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow g''(x) = 6x + 6$

$g''(x) = 0 \Rightarrow 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$



بنابراین :

اگر $x > -1$ آنگاه $g''(x) > 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-1\ ,\ +\infty)$ به سمت بالاست.

اگر $x < -1$ آنگاه $g''(x) < 0$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty\ ,\ -1)$ به سمت پایین است.

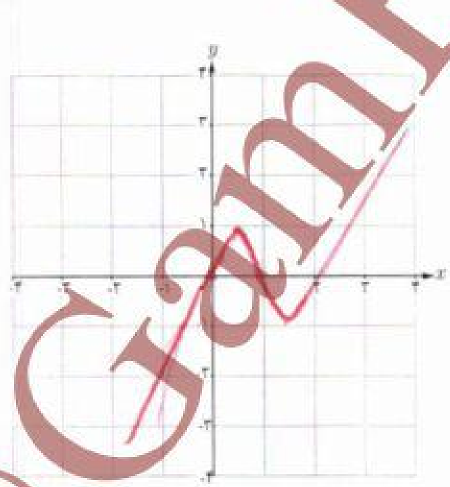
کار در کلاس

نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

$f(0) = f(1) = f(2) = 0$

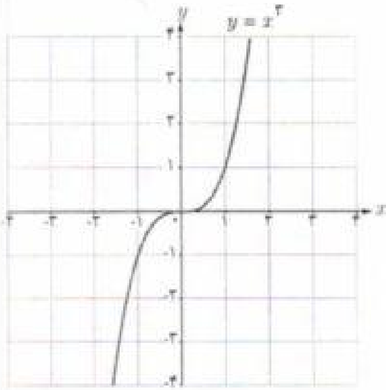
و بر بازه $(-\infty\ ,\ 1)$ ، $f''(x) < 0$

و بر بازه $(1\ ,\ \infty)$ ، $f''(x) > 0$.



@GamBeGam-Darsi

نقطهٔ عطف نمودار یک تابع



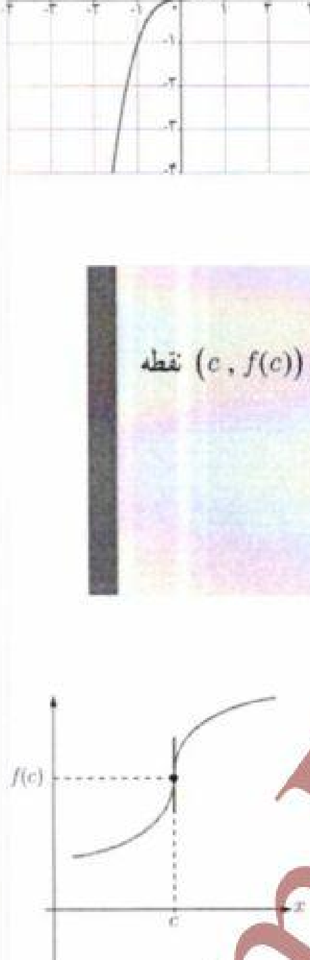
نمودار تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty , 0)$ رو به پایین و در بازهٔ $(0 , +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = 0$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = 0$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c , f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c , f(c))$ تغییر کند.



خط $x = c$ مماس قائم است.

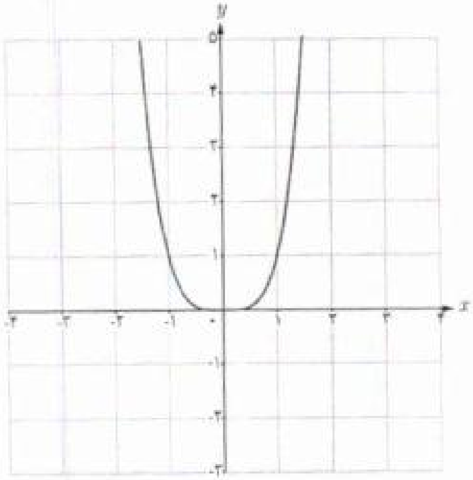
از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.

از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(c , f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c , f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = 0$. با این حال شرط $f''(c) = 0$ برای نقطهٔ عطف بودن $x = c$

به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c)=0$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^4$ را بررسی می‌کنیم. داریم :

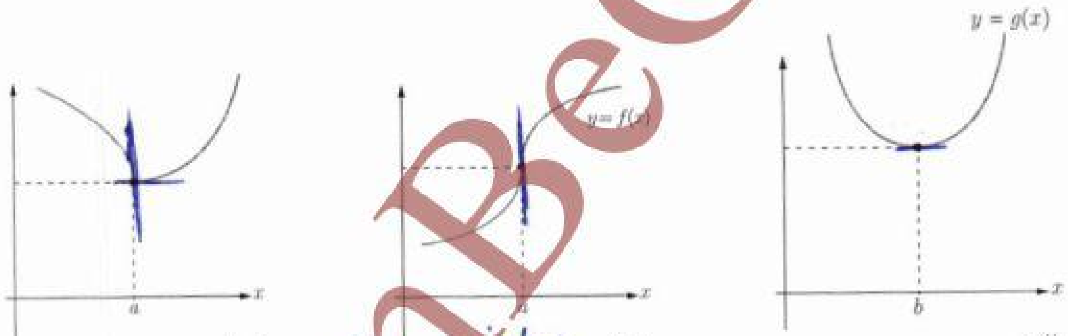
$$f'(x)=4x^3 \quad , \quad f''(x)=12x^2$$



با اینکه $f''(0)=0$ اما تابع f'' در دو طرف $x=0$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=0$ عوض نمی‌شود و لذا $x=0$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



(پ) عطف (ب) (الف)

۲ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند. ✓

ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است. ✗ مثال قسمت (ب)

پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است. ✗

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد. ✓

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد. ✗ مانند مثال پ سوال اول

@GamBeGam-Darsi

مثال : جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۵$

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$

حل :

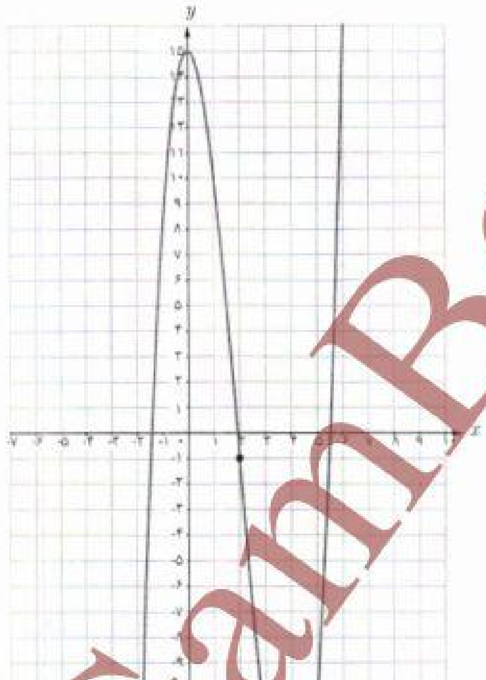
الف) $f'(x)=۳x^۲-۱۲x$ و $f''(x)=۶x-۱۲$

$f''(x)=۰ \Rightarrow x=۲$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده است و تنها در $x=۲$ برابر صفر می‌شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x=۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x=۲$ تغییر علامت دهد.



اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲− است. از طرفی داریم :

x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f		۱−	
		نقطهٔ عطف	

@GamBeGam-Darsi

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \rightarrow f''(x)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

از آنجا که مقدار $\sqrt[3]{x^5}$ به ازای xهای مثبت، مثبت و به ازای xهای منفی، منفی است.

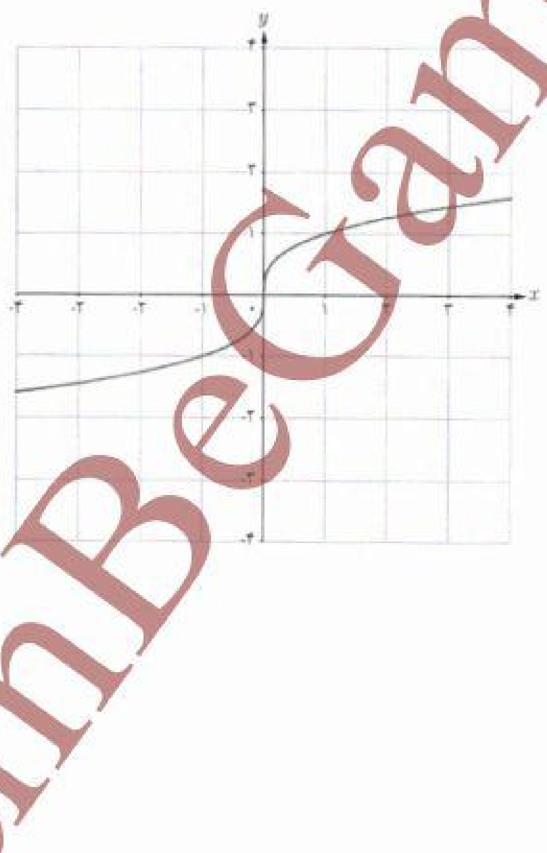
داریم :

اگر $x>0$، آنگاه $f''(x)<0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

اگر $x<0$، آنگاه $f''(x)>0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

لذا جهت تقعر این تابع در $x=0$ عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطهٔ $x=0$ دارای مماس (مماس قائم) است.

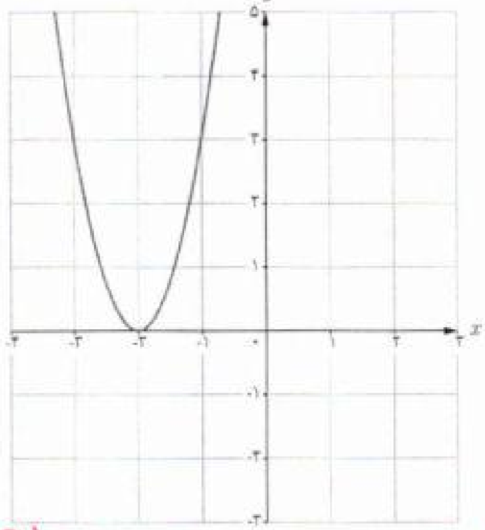
بنابراین $x=0$ نقطهٔ عطف این تابع است.

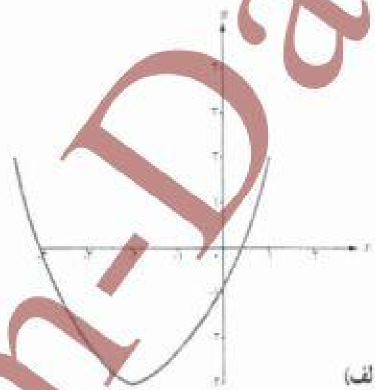


@GamBeGam-Darsi

کار در کلاس

۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟



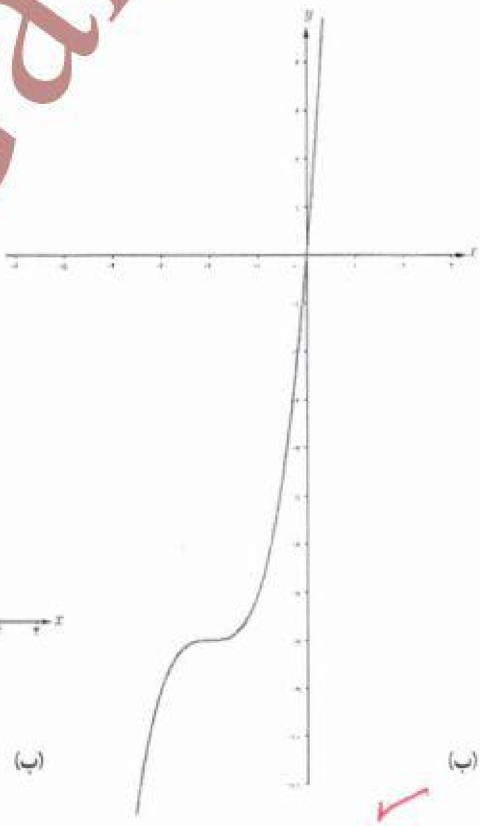


(الف)

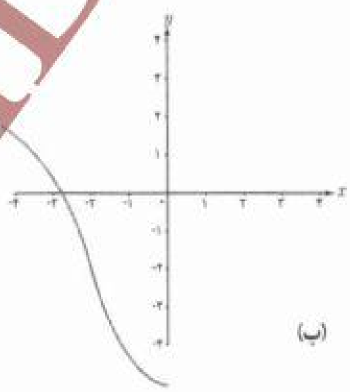
$a>0 \quad b>0$

$-\frac{b}{2a}<0 \Longrightarrow -b<0 \Longrightarrow b>0$

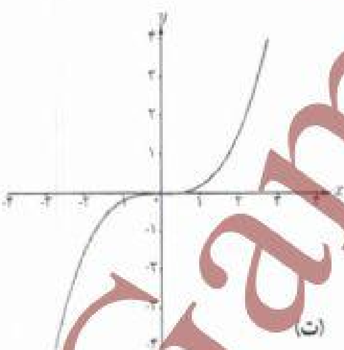
یعنی تابع صعودی و طول نقطه عطف آن منفی باشد



(ب)



(پ)



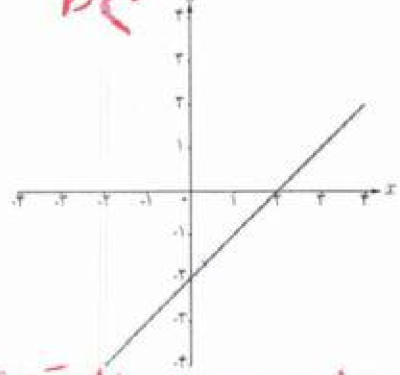
(ت)

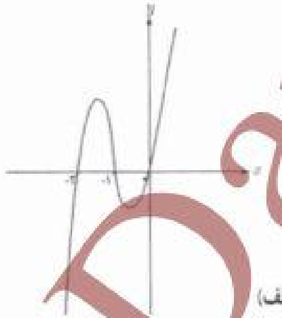
@GamBeGam-Darsi

۳ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

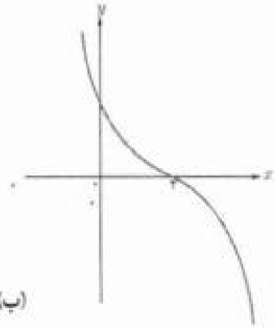
$a>0$

$b<0$

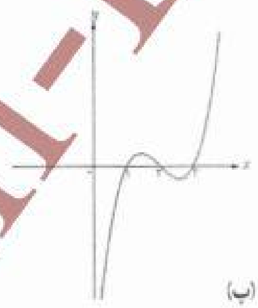




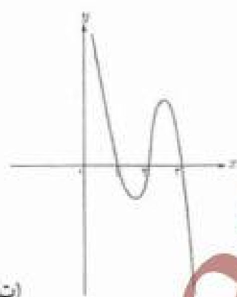
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

تابع صعودی طول نقطه‌ی عطف آن $x=-\frac{b}{3a}$ مثبت باید باشد که گزینه‌ی پ درست است

تمرین

۱ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

۳ برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

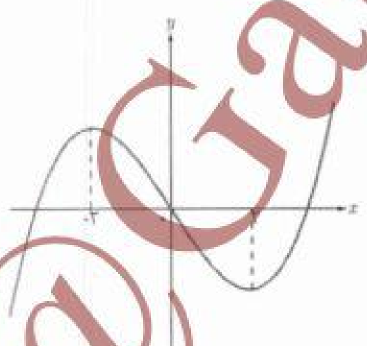
الف) نقطهٔ $(0, 0)$ ب) نقطهٔ $(1, 0)$ پ) نقطهٔ $(0, 1)$ ت) نقطهٔ $(2, 2)$

$f(x)=y=x^3$ $f(x)=(x-1)^3$ $f(x)=x^3+1$ $f(x)=(x-2)^3+2$

۴ مقادیر a، b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

۵ اگر $(0, 0)$ نقطه عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



۵

$y'=3x^2+2ax+b$

$y''=6x+2a \Rightarrow 6(0)+2a=0 \Rightarrow a=0$

$(\text{Min})\ x=2 \Rightarrow 3(2)^2+0+b=0 \Rightarrow b=-12$

$(0,0) \Rightarrow 0+0+0+C=0 \Rightarrow C=0$

@GamBeGam-Darsi

درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y=f(x)$ و زوج مرتب (x , y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط (x , y) به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: اگر بدانید تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم:

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x=1$ و $x=0$ و $x=-2$ است و f در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر باشد.

۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{-6}{5})=2$ و $f(\frac{1}{2})=-0/6$.

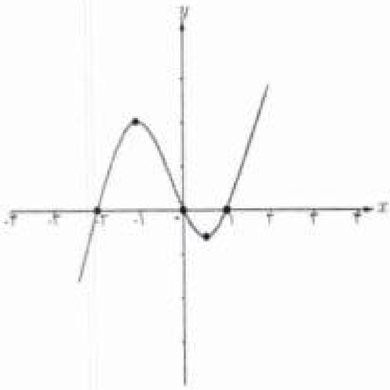
۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x=-\frac{1}{3}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{1}{3}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{1}{3})=0/7$.

در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حل: از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x=-\frac{6}{5}$ و $x=\frac{1}{2}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x=-\frac{1}{3}$ رو به پایین و در سمت راست $x=-\frac{1}{3}$ رو به بالاست و چون f' در $x=-\frac{1}{3}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x=-\frac{1}{3}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

@GamBeGam-Darsi

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		∩ (−)		∩ (−)	۰	∪ (+)		∪ (+)	
f		↗	۲	↘	۰/۷	↘	−۰/۶	↗	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

@GamBeGam-Darsi

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^3$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

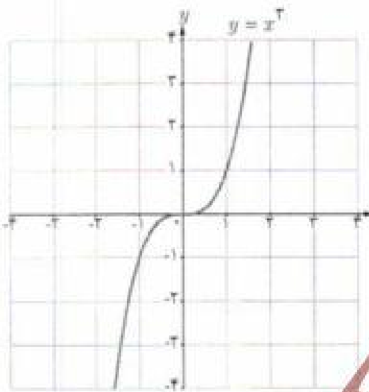
$f(x)=x^3=0 \to x=0 \to$ (۰ , ۰) محل برخورد نمودار با محورهای مختصات

$f'(x)=3x^2=0 \to x=0$

$f''(x)=6x=0 \to x=0$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
f'	+		+
f''	−		+
f	↗		↗

نقطهٔ عطف



این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لذا دو شاخه انتهایی نمودار در ربع‌های اوّل و سوم قرار دارند.

می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط (۱ , ۱) و (۱- , ۱-) نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y=x^3$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.

مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2(x+3)$ را رسم کنید.

حل :

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-3$

بنابراین نقاط (۰ , ۱) و (۰ , ۳-) محل‌های برخورد با محور xها است

$x=0 \Rightarrow y=3$

بنابراین نقطهٔ (۳ , ۰) محل برخورد با محور yهاست

$f'(x)=2(x-1)(x+3)+(x-1)^2=(x-1)(3x+5)$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-\frac{5}{3}$

@GamBeGam-Darsi

لذا نقاط $(۰\,,\,۱)$ و $\left(-\frac{۵}{۳}\,,\,\frac{۲۵۶}{۲۷}\right)$ نقاط بحرانی‌اند

$$f''(x)=(۳x+۵)+۳(x-۱)=۶x+۲$$

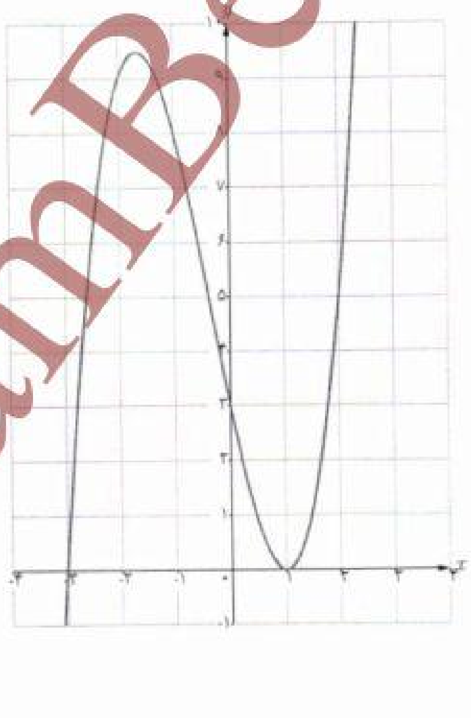
$$f''(x)=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است، از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
f''		$\frown\,-$		$\frown\,-$	۰	$\smile\,+$		$\smile\,+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۲۵۶}{۲۷}$	$\searrow$	$\frac{۱۲۸}{۲۷}$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

ماکزیمم   عطف   مینیمم

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



@GamBeGam-Darsi

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq ۰$ و $d\neq ۰$ و $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

بنابراین $y=\dfrac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=+\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x=-\dfrac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است.

✤ مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.

✤ حل : دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۱$ ، لذا خط $y=۱$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-\infty$ ، لذا $x=۱$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(۰\,,\,-۲)$ و $(-۲\,,\,۰)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\quad,\ x\neq ۱$$

و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\,۱)$ و $(۱\,,\,+\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

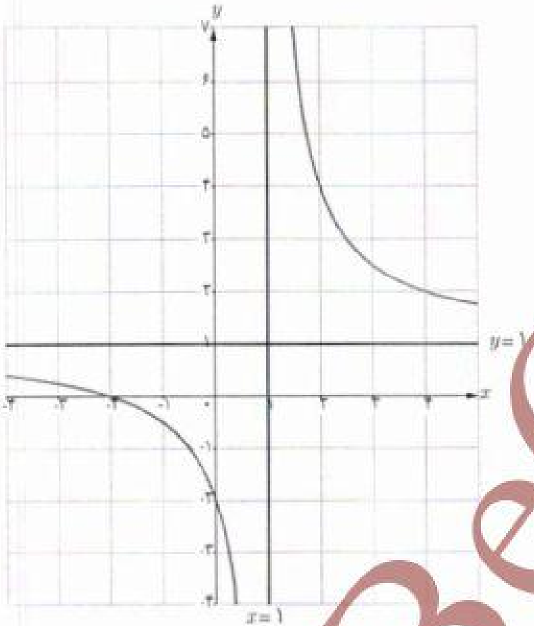
$$f''(x)=\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)^۴}=\frac{۶}{(x-۱)^۳}\quad,\ x\neq ۱$$

@GamBeGam-Darsi

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty , 1)$ داریم $f''(x) < 0$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(1 , +\infty)$ داریم $f''(x) > 0$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است:

x	$-\infty$		-۲		۰		۱		$+\infty$
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	
y''		$-$		$-$		$-$		$+$	
y		$\searrow$	۰	$\searrow$	-۲	$\searrow$	$-\infty \;\; +\infty$	$\searrow$	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



✤ مثال: جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \dfrac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

✤ حل: دامنهٔ این تابع $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\dfrac{۳}{۲}$، لذا $y = -\dfrac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^{+}} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^{-}} f(x) = +\infty$، لذا $x = \dfrac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۰ , ۴)$ و $(-\dfrac{۴}{۳} , ۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$f'(x) = \frac{۱۱}{(-۲x+۱)^۲} \qquad \text{و} \qquad x \neq \frac{۱}{۲}$$

@GamBeGam-Darsi

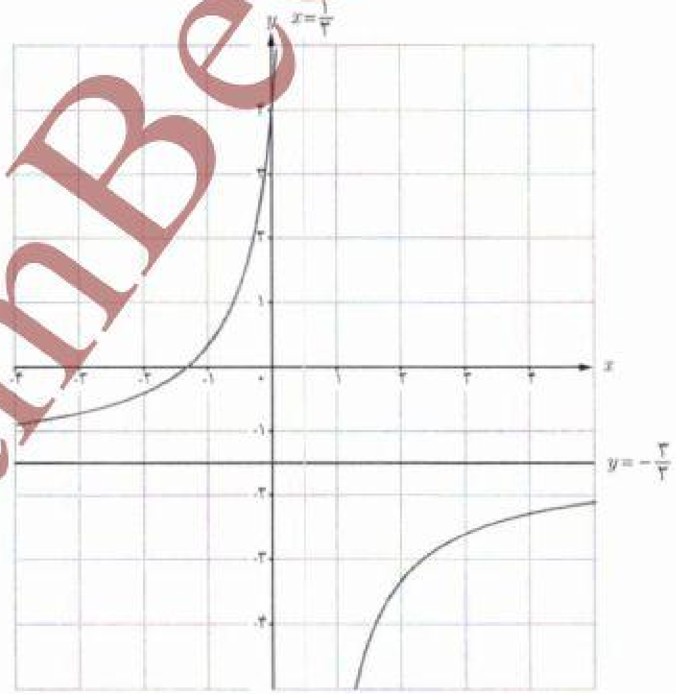
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت :

$$f''(x)=\frac{۴۴}{(-۲x+۱)^{۳}} \qquad \text{و} \qquad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ داریم $f''>۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ داریم $f''<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$		$-\frac{۴}{۳}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y''		$\cup$ +		$\cup$ +		$\cup$ +		$\cap$ −	
y	$-\frac{۳}{۲}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	۴	$\nearrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۳}{۲}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



@GamBeGam-Darsi

$(۲,۱) = (-\frac{d}{c} , \frac{a}{c}) \Rightarrow -\frac{d}{c} = ۲ , \frac{a}{c} = ۱ \Rightarrow a = c , d = -۲c$ (۲)

$(-۱,۰) \Rightarrow a(-۱)+b=۰ \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow f(x) = \frac{ax+a}{ax-۲a} \Rightarrow f(x) = \frac{x+۱}{x-۲}$

تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

ث) $f(x) = \frac{-x}{x+3}$

ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

۲ فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید.

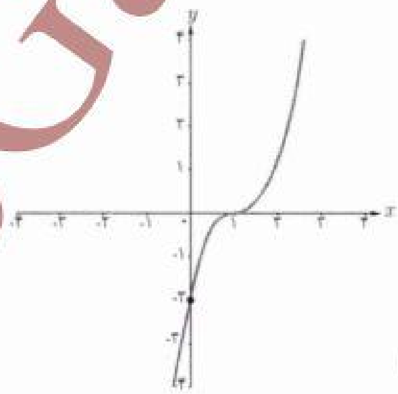
حل [illegible] صفر

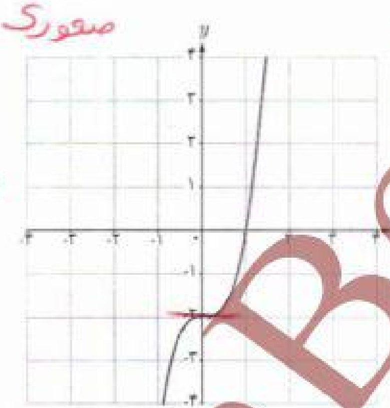
۳ کدام یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.

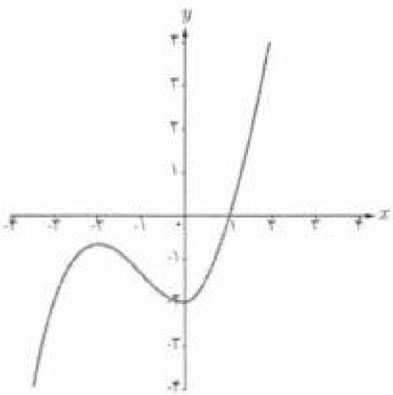
$x = -\frac{b}{۳a} = ۰ \Rightarrow f(۰) = -۲$

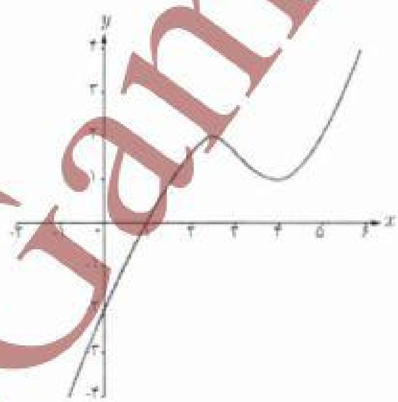
عطف

$a > ۰ \Rightarrow$ صعودی


الف)


ب)


پ)


ت)

@GamBeGam-Darsi

ادامه‌ی حل تمرین صفحه‌ی ۱۴۴،۳

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

۵/۱) $f(x) = \dfrac{-x}{x+3} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{-3\}$

۱) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = -3$ مجانب قائم

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{-x}{x+3} = -1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$ افقی

۲) $f'(x) = \dfrac{-(x+3)-(1)(-x)}{(x+3)^2} = \dfrac{-3}{(x+3)^2} < 0$

۳) $f''(x) = \dfrac{6}{(x+3)^3}$ $\left(\begin{array}{l} x+3=0 \\ x=-3 \end{array}\right)$

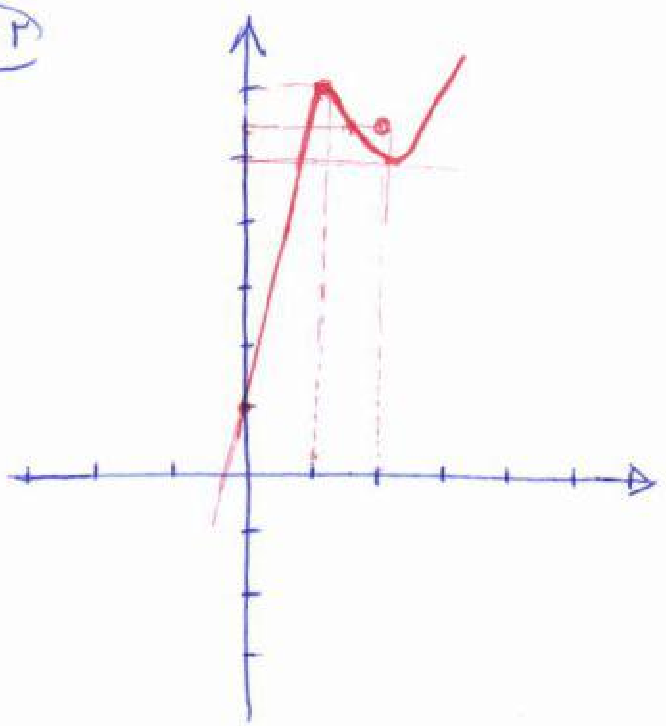
x	$-\infty$	-4		-3		0	$+\infty$
f'	$-$		$-$	‖	$-$		$-$
f''	$\cap$ $-$		$\cap$ $-$	‖	$+$ $\cup$		$+$ $\cup$
f	$-1 \searrow$	-4	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	0	$\searrow -1$

ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
f'	$+$	$+$	0 $-$	$-$	0	$+$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cap$	0 $+$ $\cup$		$+$ $\cup$
f	$\nearrow$	1 $\nearrow$	6 $\searrow$	$5/5$ $\searrow$	5	$\nearrow$



@GamBeGam-Darsi

حل تمرین صفحه‌ی ۱۴۴/۲ ادامه‌ی سؤال یک

(پ) $f(x) = -x(x+2)^2 \Longrightarrow x=0 \Rightarrow y=0$

$f'(x) = -1(x+2)^2 + 2(x+2)(-x) = 0$

$(x+2)(-x-2-2x) = 0$

$(x+2)(-3x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	-2		$-\frac{4}{3}$		$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
f''	$+$		$+$	0	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$f''(x) = 1(-3x-2) + (-3)(x+2) = 0$

$\Rightarrow f''(x) = -3x-2-3x-6 \Rightarrow -6x-8=0$

$\Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

تهیه کننده :

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه ، استان خوزستان

(ت) $f(x) = \frac{2x-1}{x-2} \Longrightarrow D = \mathbb{R} - \{2\}$

(۱) $\begin{cases} x=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \pm\infty & \text{مجانب قائم} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x-2} = 2 \Rightarrow y=2 & \text{مجانب افقی} \end{cases}$

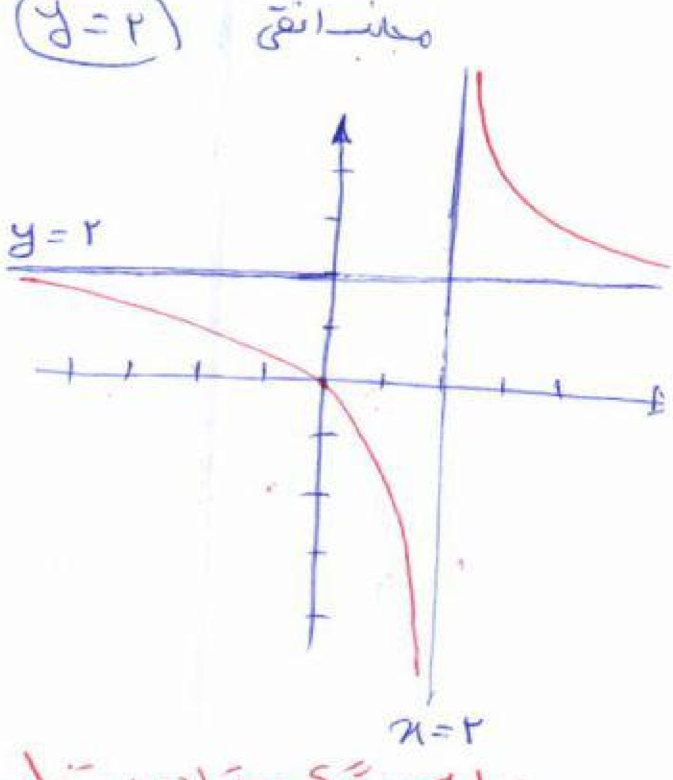
(۲) $f'(x) = \frac{2(x-2)-(2x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$

(۳) $f''(x) = \frac{0+6(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{+6}{(x-2)^3}$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		$-$		$-$	‖	$-$	
f''		$-$		$-$	‖	$+$	
f	2	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	2

کمکی



از نقاط کمکی دیگر می‌توان استفاده شود.

@GamBeGam-Darsi

حل تمرین صفحه ۱۴۴/۱ سؤال ۳

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ $D = \mathbb{R}$

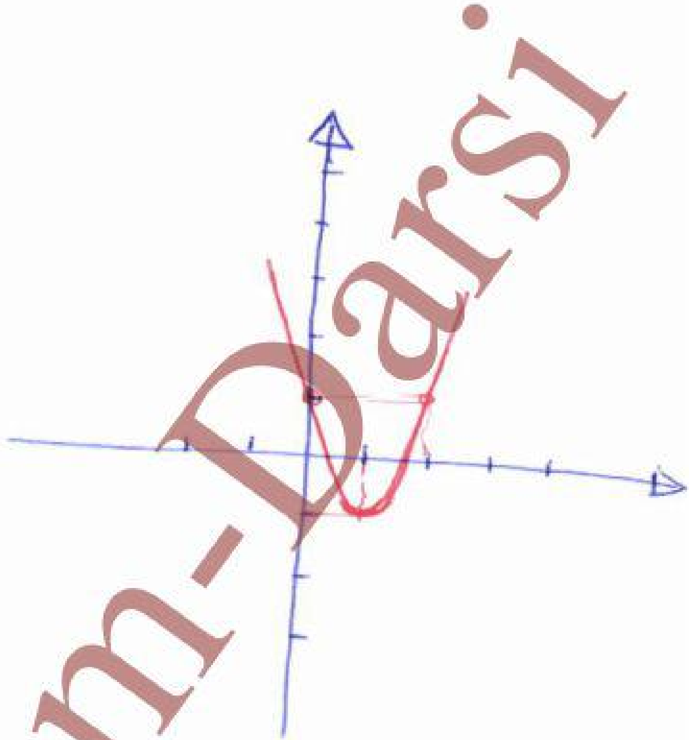
① $f'(x) = 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$

② $f''(x) = 4 > 0$

③ $x = 0 \Rightarrow y = 1$

کمکی ②

x	$-\infty$	0	1	
f'	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$		$+$
f	↘	1 ↘	-1	↗ 1

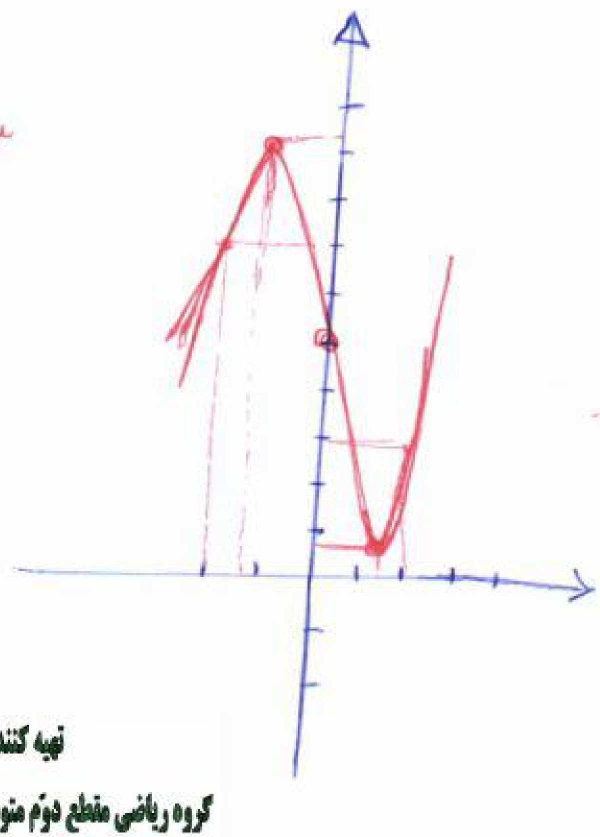


ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5 \Rightarrow D = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 5 = 0 \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{3}} \simeq 1.3 \\ x = -\sqrt{\frac{5}{3}} \simeq -1.3 \end{cases}$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{\frac{5}{3}}$	0	$\sqrt{\frac{5}{3}}$	2	$+\infty$
f'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	↗	7 ↗	9.3 ↘	5 ↘	0.7 ↗	3 ↗	



تهیه کننده:

گروه ریاضی مقطع دوم متوسطه، استان خوزستان

@GamBeGam-Darsi