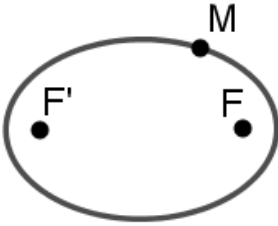


تاریخ امتحان : ۱۴۰۲/۰۱/۲۲	بسمه تعالی آموزش و پرورش استان کرمانشاه مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی (نوبت صبح)	سؤالات شبه نهایی درس : هندسه (۳)
زمان امتحان : ۱۲۰ دقیقه		پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
تعداد صفحات : ۲ صفحه		نام و نام خانوادگی :
تعداد سؤالات : ۱۶		دانش آموزان سراسر استان در فروردین ۱۴۰۲

امام علی (ع) فرمود: کسی که با دانش خود به پیکار با جهل خویش برخیزد، به بالاترین خوشبختی می رسد.

بارم	سؤالات	ردیف
۰/۵	درستی یا نادرستی هر یک عبارات زیر را مشخص کنید. الف) نقطه $(3, -2, 0)$ روی صفحه xoy قرار دارد. ب) اگر $A^2 = A$ باشد، در این صورت داریم: $(A + I)^2 = I + 2A$.	۱
۰/۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب تکمیل کنید. الف) بیضی مکان هندسی نقطه هایی از صفحه است که فاصله هایشان از دو نقطه ثابت در آن صفحه یک مقدار ثابت است. ب) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی	۲
۱	با استفاده از روش ساروس، دترمینان ماتریس زیر را به دست آورید. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	۳
۱/۵	اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2y & 1 \end{bmatrix}$ و $A \times B$ ماتریسی قطری باشد، x و y را بیابید.	۴
۱	ماتریس مربعی از مرتبه ۳ مشخص کنید به طوری که $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & i \leq j \\ 2j - i & i > j \end{cases}$.	۵
۱/۵	معادله دایره ای را بنویسید که نقطه های $A(4, -1)$ و $B(-2, 1)$ دو سر قطری از آن باشند.	۶
۱/۵	نقطه های A ، B و C در صفحه مفروضند. نقطه ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از نقطه C به فاصله ۳ سانتی متر باشد. (بحث کنید).	۷
۱/۵	اگر خروج از مرکز بیضی برابر با $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.	۸
۱/۵	معادله سهمی به رأس $A(2, 1)$ و کانون $F(2, 5)$ را به دست آورده و معادله خط هادی آن را بنویسید.	۹

ادامه سؤالات در صفحه دوم ←

ردیف	سؤالات	بارم
۱۰	<p>در شکل زیر، نقطه M روی بیضی و کانون های F و F' مشخص شده اند. خط d را به گونه ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF' = MF'$</p> 	۱/۷۵
۱۱	<p>نقطه های $A = (-۱, ۲, ۳)$، $B = (-۲, ۴, ۱)$ و $C = (۱, ۳, ۵)$ سه رأس مثلث ABC هستند. الف) کسینوس زاویه A از مثلث ABC را حساب کنید. ب) مساحت مثلث ABC را تعیین کنید.</p>	۱/۵
۱۲	<p>اگر $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k}$ باشند، طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ را به دست آورید.</p>	۱
۱۳	<p>اگر $a = b$، $a - b = ۲\sqrt{۳}$ و $a + b = ۶$ باشند، زاویه بین دو بردار a و b را به دست آورید.</p>	۱/۵
۱۴	<p>برای بردارهای a و b ثابت کنید: $a + b \leq a + b$.</p>	۱/۵
۱۵	<p>اگر $a + b = (۲, ۳, ۴)$ و $a = i + ۲j - ۳k$ باشد، بردار b را به دست آورید.</p>	۱/۵
۱۶	<p>اگر i، j و k بردارهای واحد باشند، حاصل عبارت روبرو را به دست آورید.</p> $(i + j - k) \times (i - j)$	۰/۷۵
	<p>سربلندی شما آرزوی ماست.</p>	جمع بارم ۲۰نمره

۱) اعداد درست (۰,۲۵) ب) درست (۰,۲۵)

۲) الفبا مجموع (۰,۲۵) ب) ندارد (۰,۲۵)

۳

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (0+0+4) - (-2+0+3) = 4 \quad (۰,۲۵)$$

$$AX=B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2x & 2x-2 \\ 2+2x & 2x+1 \end{bmatrix} \quad (۱)$$

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1 \quad \text{و} \quad 2+2x=0 \Rightarrow x=-1$$

$$A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (۰,۲۵)$$

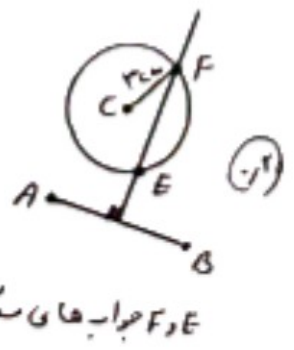
۲) مرکز دایره نقطه وسط پاره خط AB است. $AB = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{30} = 2\sqrt{10} \quad (۰,۲۵)$

$R = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$ و $O = (\frac{4+1-2}{2}, \frac{-1+1}{2}) = (1,0) \quad (۰,۲۵)$

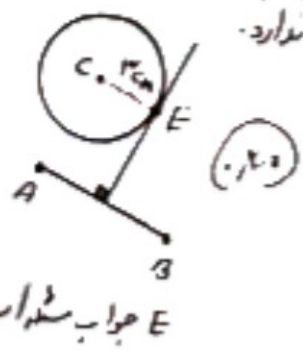
معادله دایره: $(x-1)^2 + y^2 = 10 \quad (۰,۲۵)$

۷) اگر دو دایره با هم مماس باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره با هم قطع کنند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.

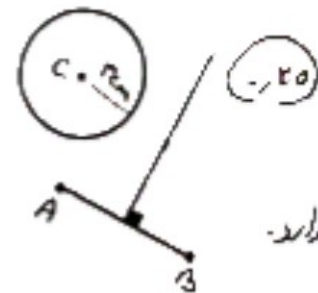
نقاط از نقطه C به دو دایره ۱ و ۲ مماس می‌کشیم. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم. اگر دو دایره بیرون هم‌دایره باشند، می‌توانیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم.



۱) E, F جواب‌های مسئله‌اند.



۲) E جواب مسئله است.



۳) مسئله جواب ندارد.

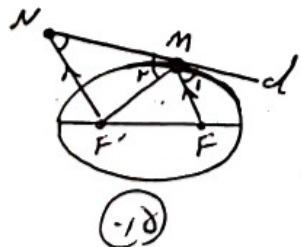
8 $\frac{c}{a} = \frac{r}{\delta} \Rightarrow c = \frac{r}{\delta} a$, $rb = 12 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4r^2 + \frac{9}{r^2} a^2$ (۱۰)

$\Rightarrow a^2 = 100 \Rightarrow a = 10 \Rightarrow ra = 20$ طول قطر بزرگ، $c = \frac{r}{\delta} a = \frac{3}{5}(10) = 2 \Rightarrow rc = 12$ (۱۰)

9 شش‌ضلعی سهمی روی بالابست. $A = (h, k) = (2, 1) \Rightarrow h = 2, k = 1$ (۱۰)

$F = (h, a+k) = (2, \delta) \Rightarrow \begin{cases} h = 2 \\ a+k = \delta \rightarrow a+1 = \delta \rightarrow a = 3 \end{cases}$ (۱۰)

معادله خط‌ها: $y = -a+k \rightarrow y = -3+1 \rightarrow y = -2$, معادله سهمی: $(x-2)^2 = 12(y-1)$ (۱۰)



10 نیام ویژگی بازتابندگی در یعنی $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ می باشد داریم: (۱۰)

$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$
 $MF \parallel NF'$ و $MN \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}$ $\Rightarrow \hat{N} = \hat{M}_2 \Rightarrow NF' = MF'$ (۱۰)

11 الف) $\vec{AB} = (-2 - (-1), 4 - 2, 1 - 3) \Rightarrow \vec{AB} = (-1, 2, -2)$ (۱۰)

$\vec{AC} = (1 - (-1), 3 - 2, \delta - 3) \Rightarrow \vec{AC} = (2, 1, 2)$ (۱۰)

$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-2 + 2 - 4}{\sqrt{1+4+4} \times \sqrt{4+1+4}} = -\frac{4}{9}$ (۱۰)

ب) $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i - 2j - 5k$, $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{49}$ (۱۰)

12 ابتدا مختصات \vec{a} و \vec{b} را حساب کرده پس طول آن را بدست می آوریم: (۱۰)

$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (1, 1, 0)$
 $\vec{b} = \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{b} = (0, 1, -1)$
 $\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (1, 2, -1)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$ (۱۰)

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 - 12 = 12 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ (۱۰)

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ $|\vec{a}| = |\vec{b}| \rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2\sqrt{2}$ (۱۰)

$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 90^\circ$ (۱۰)

(۱۳) اگر θ زاویه بین دو بردار \vec{a} ، \vec{b} باشد داریم:

$$|a+b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta \quad (13a)$$

$$\cos\theta \leq 1 \xrightarrow{\times 2|a||b|} 2|a||b|\cos\theta \leq 2|a||b| \quad (13b)$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|\cos\theta \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| \Rightarrow |a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2 \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b| \quad (13c)$$

(۱۵)

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, 2, 2) = \vec{c}, \quad \vec{a} = i + 2j - 3k = (1, 2, -3) \Rightarrow \vec{b} = \vec{c} - \vec{a} = (1, 1, 5) \quad (15a)$$

(۱۶)

$$(i+j-k) \times (i-j) = i \times i - i \times j + j \times i - j \times j - k \times i + k \times j = -k - k - j - i = -2k - j - i \quad (16a)$$