بنام خداوند جان آفرین حکیم سخن در زبان آفرین

حسابان (۱)

پایه یازدهم ریاضی فیزیک

فصل ۴

۱ رادیان

۲ نسبت های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

تهیه و تنظیم : مجید قادری

دبیر ریاضی از بندرعباس

شماره تماس ۰۹۱۷۷۶۳۵۱۶۵

@MATHCLASS2

Majid.ghaderi.mathclass.2

فصل ۴
درس ۱

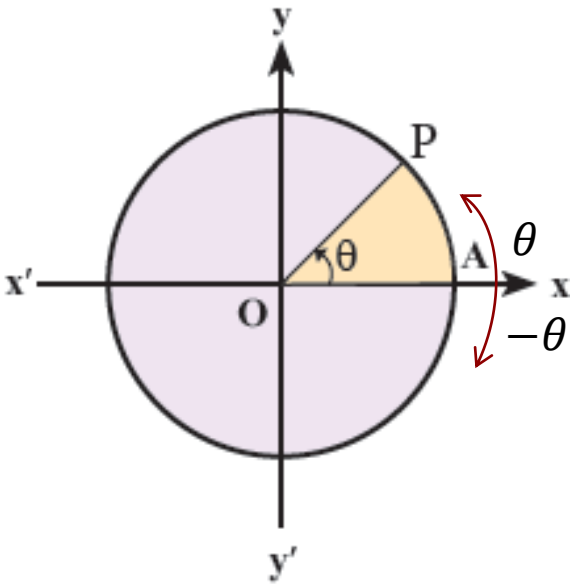
رادیان

اهداف

- یادآوری زاویهٔ مرکزی و ارتباط با کمان روبه روی آن
- یادآوری دایره مثلثاتی و جهت مثلثاتی
- معرفی رادیان به عنوان واحد اندازه گیری زاویه
- رابطهٔ بین طول کمان روبه روی یک زاویهٔ مرکزی و اندازه یک زاویه بر حسب رادیان با توجه به شعاع
- رابطهٔ بین واحدهای اندازه گیری درجه و رادیان

@mathclass2 مجید قادری

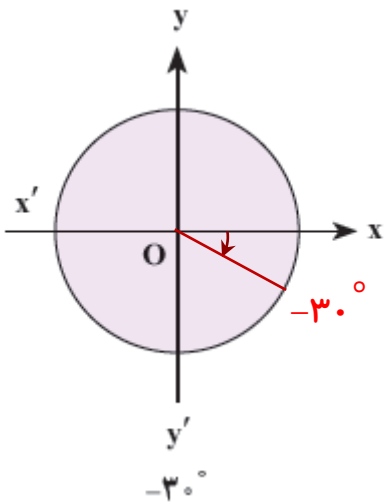
یادآوری
(دایرهٔ مثلثاتی)

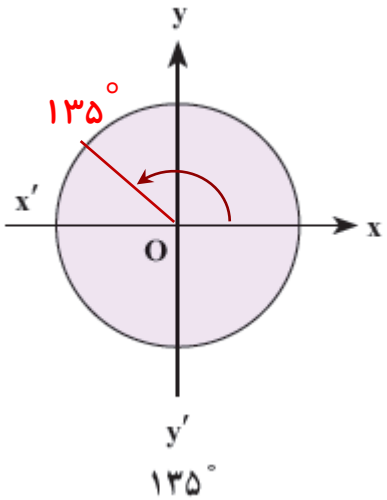


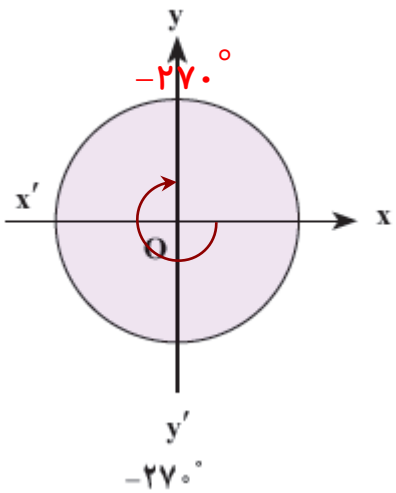
دایره روبه رو، به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را درنظر بگیرید.

نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. اگرنقطه P روی این دایره در خلاف جهت عقربه های ساعت حرکت کند زاویه AOP مثبت و حرکت در جهت عقربه های ساعت، منفی است.

چنین دایره ای را یک **دایره مثلثاتی** می نامیم.

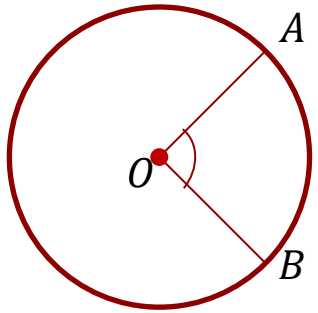






یادآوری
(زاویهٔ مرکزی)

زاویه ای که راس آن روی مرکز دایره و اضلاع آن شعاع دایره باشند، **زاویهٔ مرکزی** نامیده می شود.



اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی با کمان روبه روی آن (برحسب درجه) برابر است.

$$A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

اگر محیط دایره ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه روی هر کدام از این کمان ها یک درجه است.

به عبارتی دیگر یک درجه برابر است با $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره است.

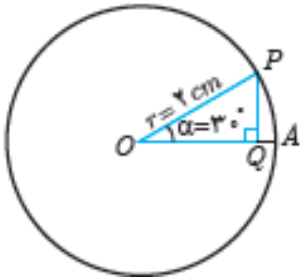
صفحه ۹۲ کتاب درسی

در پایه دهم زاویه ها را بر حسب «درجه» اندازه گیری و بیان می کردیم.

در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری برای اندازه گیری و بیان زاویه ها استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می شویم.

@mathclass

فعالیت صفحهٔ ۹۲ کتاب درسی



۱) دایرهٔ مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی متر داده شده است. اندازهٔ ضلع PQ در مثلث OPQ را با استفاده از نسبت های مثلثاتی (سال قبل) به دست آورید.

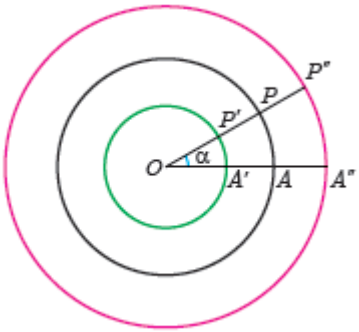
$$\sin ۳۰^\circ = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{PQ}{۲} \Rightarrow PQ = ۱$$

در پایه دهم آموخته ایم که، ضلع روبه روی زاویهٔ ۳۰ درجه نصف وتر است.

۲) کمان ۳۰ درجه، $\frac{۱}{۱۲}$ از کل محیط دایره را تشکیل می دهد. چرا؟ زیرا محیط دایره ۳۶۰ درجه است.

طول کمان روبه رو به زاویهٔ α (یعنی $\widehat{PA}$) را به دست آورید.

$$\widehat{PA} = \frac{۱}{۱۲} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۱۲} \times (۲\pi r) = \frac{۱}{۶}\pi r \xrightarrow{r=۲} \widehat{PA} = \frac{۱}{۶}\pi(۲) = \frac{\pi}{۳}$$



اکنون به مرکز O دایره های دیگری به شعاع های ۱ و ۳ سانتی متر رسم می کنیم. (شکل مقابل)

مطابق آنچه در بالا انجام شد طول کمان های $\widehat{P'A'}$ و $\widehat{P"A"}$ را که روبه روی زاویهٔ α هستند را به دست آورید.

$$\widehat{P'A'} = \frac{۱}{۱۲} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۶}\pi r \xrightarrow{r=۱} \widehat{P'A'} = \frac{۱}{۶}\pi(۱) = \frac{\pi}{۶}$$

$$\widehat{P"A"} = \frac{۱}{۱۲} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{۱}{۶}\pi r \xrightarrow{r=۳} \widehat{P"A"} = \frac{۱}{۶}\pi(۳) = \frac{\pi}{۲}$$

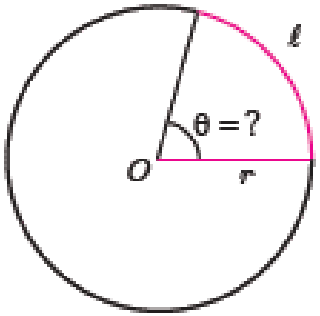
در هر دایره نسبت طول کمان روبه رو به زاویهٔ α، به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت ها چه رابطه ای با هم دارند؟

$$\frac{\widehat{P'A'}}{OP'} = \frac{\frac{\pi}{۶}}{۱} = \frac{\pi}{۶} \qquad \frac{\widehat{PA}}{OP} = \frac{\frac{\pi}{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۶} \qquad \frac{\widehat{P"A"}}{OP"} = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۳} = \frac{\pi}{۶}$$

با هم برابرند.

@mr.class2

فعالیت ۳ صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی



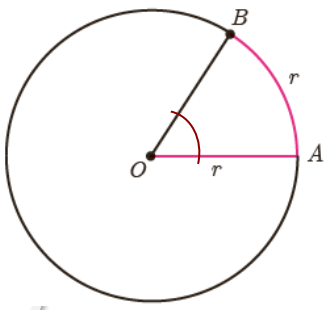
مانند آنچه در شکل مقابل می بینیم، در یک دایره به شعاع r، طول کمان روبه رو به زاویهٔ θ (کمان l) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ *نسبت دو مقدار مساوی، برابر یک است.*

با استفاده از نقاله بگویید اندازهٔ زاویهٔ θ تقریبا چند درجه است؟ $\theta = ۵۷^\circ$

صفحه ۹۳ کتاب درسی

۱ رادیان

۱ رادیان برابر است با اندازهٔ زاویه مرکزی دایره ای که طول کمان روبه روی آن با شعاع آن دایره مساوی است.



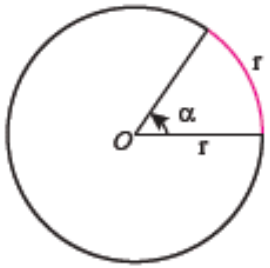
برای نمایش زاویه بر حسب رادیان از rad استفاده می کنیم.

$$A\hat{O}B = ۱\ rad \cong ۵۷^\circ$$

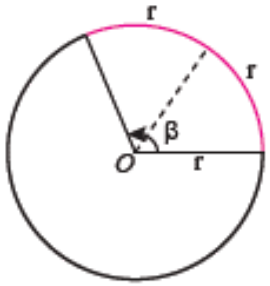
@class2 مجید قادری

صفحه ۹۳ کتاب درسی

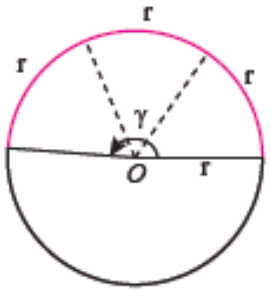
در زیر، هر یک از زاویه های ۱ تا ۶ رادیان در دایره ای به شعاع r رسم شده است. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه روی هر زاویه به شعاع آن دقت کنید.



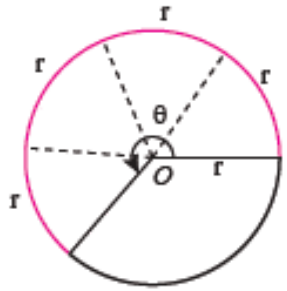
$$\alpha = \frac{r}{r} = ۱ \ rad$$



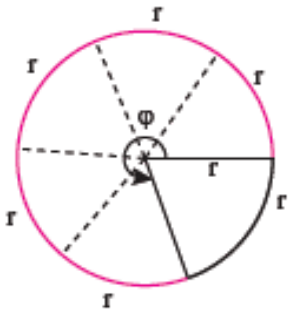
$$\beta = \frac{۲r}{r} = ۲ \ rad$$



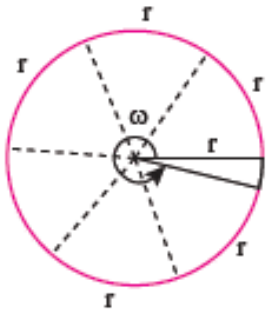
$$\gamma = \frac{۳r}{r} = ۳ \ rad$$



$$\theta = \frac{۴r}{r} = ۴ \ rad$$



$$\varphi = \frac{۵r}{r} = ۵ \ rad$$

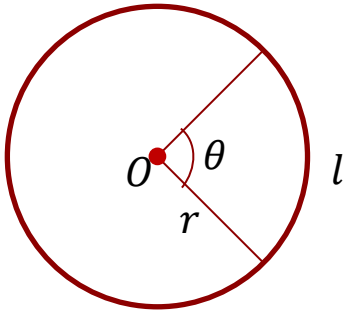


$$\omega = \frac{۶r}{r} = ۶ \ rad$$

@mathclass

صفحه ۹۴ کتاب درسی

رابطهٔ بین یک زاویهٔ مرکزی و کمان روبه روی آن بر حسب رادیان



θ : اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان

r : شعاع دایره

l : طول کمان مقابل زاویهٔ θ

$$\theta = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحد هستند.

تمرین تکمیلی

سوال ۱ : با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید.

l	۵ سانتی متر	۵۰۰ سانتی متر	۷۵سانتی متر	۲۰۰سانتی متر	۹۰سانتی متر	۵۰ متر	۱۰متر	۴۰۰ سانتی متر
r	۵ سانتی متر	۵ متر	۰/۵ متر	۱ متر	۳۰ سانتی متر	۱۰ متر	۱۰۰ سانتی متر	۲۰سانتی متر
α	۱ رادیان	۱ رادیان	۱/۵ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان	۵ رادیان	۱۰ رادیان	۲۰ رادیان

$\frac{l}{۵۰} = ۱/۵$ $\quad$ $\frac{۹۰}{r} = ۳$ $\quad$ $\frac{۱۰۰۰}{r} = ۱۰$ $\quad$ $\frac{l}{۲۰} = ۲۰$

$l = ۵۰ \times ۱/۵ = ۷۵$ $\quad$ $l = ۲۰ \times ۲۰ = ۴۰۰$

@mathclass2 مجید قادری

مثال صفحهٔ ۹۴ کتاب درسی

اندازه یک زاویهٔ نیم صفحه (180°) و نیز یک زاویه قائمه (90°) برحسب رادیان چقدر است؟

فرض کنیم l ؛ طول کمان روبه رو به زاویهٔ نیم صفحه باشد. می دانیم l ، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم:

$$l = \frac{1}{2} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{2} \times (2\pi r) = \pi r$$

l را بر r (شعاع دایره) تقسیم می کنیم تا اندازهٔ زاویه برحسب رادیان تعیین شود.

$$180^\circ = \frac{\pi r}{r} = \pi \quad \text{رادیان}$$

فرض کنیم l' ؛ طول کمان روبه رو به زاویهٔ قائمه باشد. می دانیم l' ، یک چهارم محیط دایره است. بنابراین داریم:

$$l' = \frac{1}{4} \times (\text{محیط دایره}) = \frac{1}{4} \times (2\pi r) = \frac{\pi r}{2}$$

l' را بر r (شعاع دایره) تقسیم می کنیم تا اندازهٔ زاویه برحسب رادیان تعیین شود.

$$90^\circ = \frac{\frac{\pi r}{2}}{r} = \frac{\pi}{2} \quad \text{رادیان}$$

@mathclass2 مجید قادری

صفحه ۹۴ کتاب درسی

اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویهٔ α برحسب رادیان باشد، آنگاه

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

تمرین تکمیلی

سوال ۲ : جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید.

$\frac{\pi}{۷} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۲۵/۷۱^\circ$ $\quad$ $\frac{۲\pi}{۵} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۷۲^\circ$ $\quad$ $\frac{۵\pi}{۴} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۲۲۵^\circ$

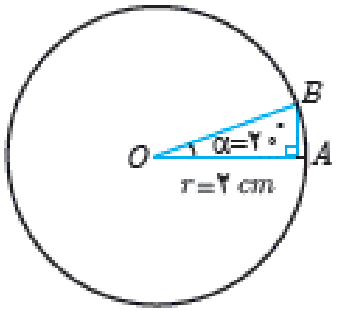
درجه (D)	۵°	$۲۵/۷۱^\circ$	۲۴°	۷۲°	۱۲۰°	۲۲۵°
رادیان (R)	$\frac{\pi}{۳۶}$	$\frac{\pi}{۷}$	$\frac{۲\pi}{۱۵}$	$\frac{۲\pi}{۵}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۴}$

$۲۴ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۱۵}$ $\quad$ $۱۲۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳}$

@mathematics2 مجید قادری

مثال صفحهٔ ۹۴ کتاب درسی

در شکل مقابل اندازهٔ زاویه α بر حسب رادیان را به دست آورید سپس اندازهٔ کمان AB را پیدا کنید.



$$\frac{۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\frac{\alpha}{\pi \text{ رادیان}} \quad \Rightarrow \quad \alpha=\frac{۲۰\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۹} \text{ رادیان}$$

$$\alpha=\frac{l}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{۹}=\frac{l}{۲} \quad \rightarrow \quad l=\frac{۲\pi}{۹} \text{ سانتی متر}$$

@mathclass2 مجید قادری

عدد π

نسبت محیط هر دایره به قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می دهند و به آن عدد پی می گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است.

π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱رادیان	۰/۵ رادیان	زاویه برحسب رادیان
دقیقا 180°	تقریبا 179°	تقریبا 171°	تقریبا 114°	تقریبا 57°	تقریبا $28/5^\circ$	زاویه برحسب درجه

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه رو به کمان نیم دایره برابر است با 180° درجه یا π رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم صفحه برابر است با π رادیان.

$\frac{\pi}{180}$ رادیان = یک درجه

π رادیان = ۱۸۰درجه

به این ترتیب داریم:

$\div 2 \rightarrow$ رادیان $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$\div 3 \rightarrow$ رادیان $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$

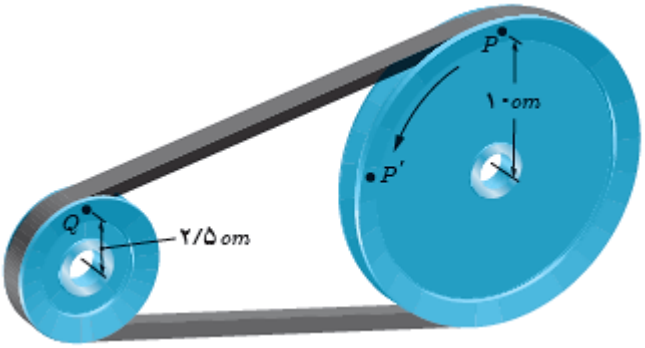
$\div 4 \rightarrow$ رادیان $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$\div 6 \rightarrow$ رادیان $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$

@mathclass2

مثال صفحهٔ ۹۴ و ۹۵ کتاب درسی

در شکل زیر، یک تسمه دو قرقره به شعاع های ۱۰ سانتی متر و ۲/۵ سانتی متر را به هم وصل کرده است. بررسی کنید وقتی قرقرهٔ بزرگ تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان می چرخد (یعنی نقطهٔ P در موقعیت P' قرار می گیرد) قرقرهٔ کوچک تر چند رادیان می چرخد؟



ابتدا مقدار مسافتی که نقطهٔ P بر روی محیط قرقره بزرگ تر طی می کند تا در موقعیت P' قرار گیرد را به دست می آوریم و آن را l می نامیم.

برای قرقرهٔ بزرگ داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{۲} = \frac{l}{۱۰} \rightarrow l = \frac{۱۰\pi}{۲} = ۵\pi \text{ سانتی متر}$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقرهٔ کوچک تر نیز ۵π سانتی متر حرکت می کند. به عبارت دیگر اندازهٔ l برای هر دو قرقره یکسان است پس برای قرقره کوچک تر داریم:

برای قرقرهٔ کوچک تر داریم:

$$\theta = \frac{l}{r'} = \frac{۵\pi}{۲/۵} = ۲\pi \ rad$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ تر ربع دور می چرخد، قرقره کوچک تر یک دور کامل می چرخد و نقطه Q به مکان اولیهٔ خود باز می گردد.

@mathclass2 مجید قادری

تمرین تکمیلی

سوال ۳: اگر در یک تراکتور، شعاع چرخ جلو ۱۵ سانتی متر و شعاع چرخ عقب ۳۰ سانتی متر باشد، در صورتی که چرخ جلو ۱۲۰ درجه بچرخد، چرخ عقب چند رادیان طی می کند؟

$$۱۲۰^\circ \xrightarrow{\times \text{رادیان} \frac{\pi}{۱۸۰}} \frac{۲\pi}{۳} \text{رادیان}$$

برای چرخ جلو داریم:

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow l = r.\alpha = ۱۵ \times \frac{۲\pi}{۳} = ۱۰\pi\ cm$$

اندازهٔ l برای چرخ جلو و عقب یکسان است پس برای چرخ عقب داریم:

$$\theta = \frac{l}{r'} = \frac{۱۰\pi}{۳۰} = \frac{\pi}{۳}\ rad$$

@mathclass2

کار در کلاس ۱ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

در جدول زیر جاهای خالی را پر کنید.

$\frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 45^\circ$ ↓ $\qquad$ $\frac{7\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 420^\circ$ ↓

زاویه برحسب درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	390°	420°
زاویه برحسب رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$

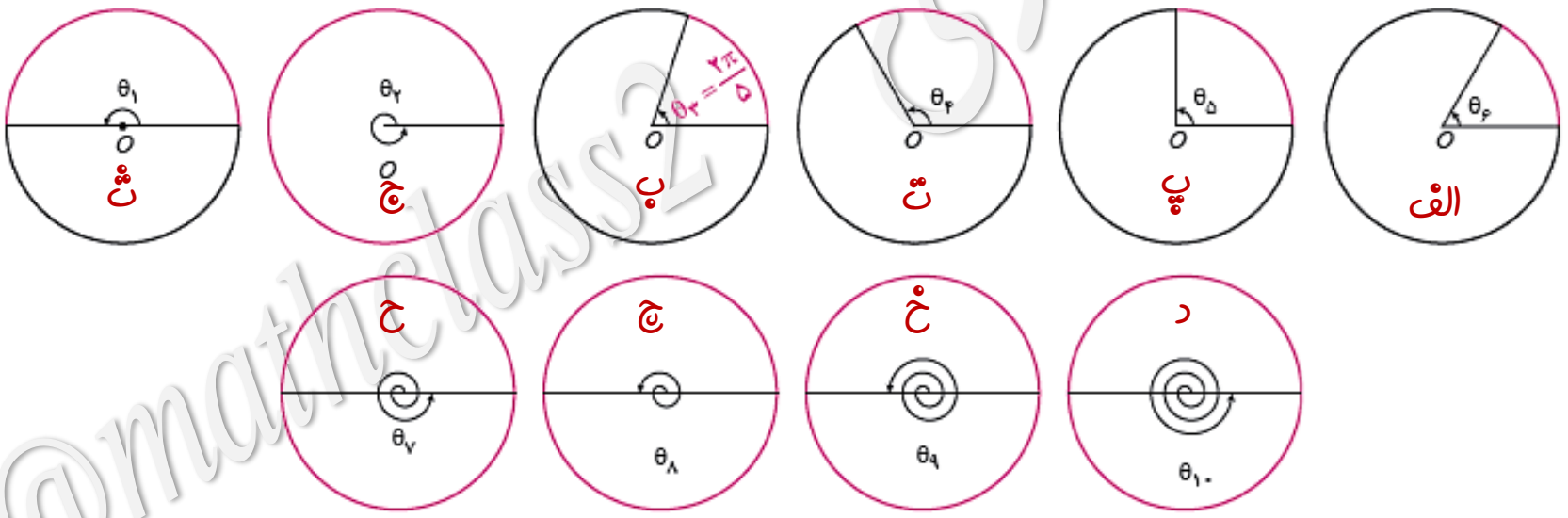
↑ $30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ $\qquad$ ↑ $270 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}$

@mathclass7

کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

در زیر، اندازهٔ برخی از زاویه ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{2\pi}{6}$ ب) $\frac{2\pi}{5}$ پ) $\frac{2\pi}{4}$ ت) $\frac{2\pi}{3}$ ث) $\frac{2\pi}{2}$ ج) 2π چ) 3π ح) 4π خ) 5π د) 6π



@mathclass2 مجید قادری

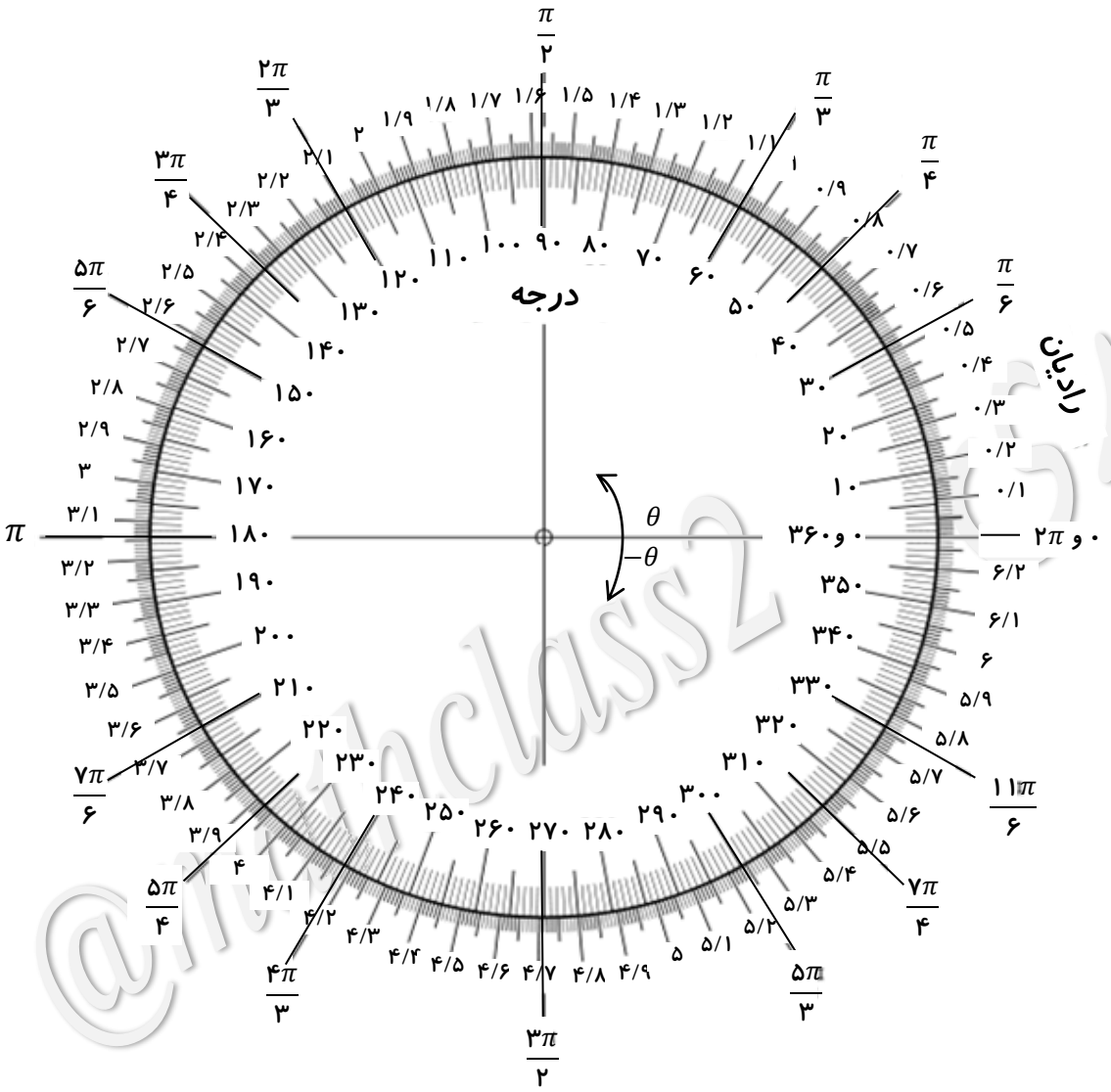
کار در کلاس ۲ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

در جدول زیر، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده اید، مقدار نسبت های مثلثاتی خواسته شده را در جاهای خالی بنویسید.

نسبت / θ(رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	۱-	۰
$\cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
$\cot\theta$	تعریف نشده	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

جمع بندی

در این تصویر درون دایره مثلثاتی بر حسب درجه (D) و بیرون آن بر حسب رادیان (R) مقیاس بندی شده است.



تبدیل درجه و رادیان

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi \text{ رادیان}}$$

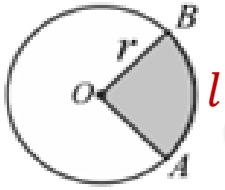
مثال: $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ رادیان

@mathclass2 مجید قادری

تمرین تکمیلی

سوال ۴ : یک کارگر شهرداری می خواهد محیط قطاعی از یک میدان دایره ای شکل به شعاع ۴ متر با زاویهٔ مرکزی ۲/۵ رادیان را گل کاری کند. محیط این قطاع چقدر است؟

به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می شود.



به قسمت هاشور خوردهٔ دایره، یک قطاع می گوییم.

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow l = r.\alpha = ۴ \times ۲/۵ = ۱۰\ m$$

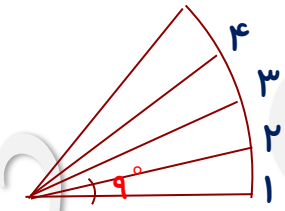
$$\text{محیط قطاع} = ۲r + l = ۲(۴) + ۱۰ = ۱۸\ m$$

@mathclass2 مجید قادری

تمرین تکمیلی

سوال ۵ : فرض کنید سوار چرخ فلکی شده اید که ۴۰ کابین دارد و کابین های آن شماره گذاری شده اند.

اگر در آغاز حرکت شما روی کابین شمارهٔ ۴ در جهت خلاف عقربه های ساعت نشسته باشید، بعد از $\frac{۲۸\pi}{۱۰}$ رادیان دوران، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟



$$\frac{۳۶۰}{۴۰} = ۹^\circ$$

میزان دوران بر حسب درجه $\longrightarrow \frac{۲۸\pi}{۱۰} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۵۰۴^\circ$

جابجایی $\longrightarrow \frac{۵۰۴^\circ}{۹} = ۵۶$ کابین

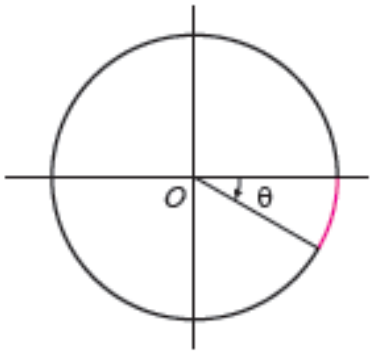
موقیت فعلی کابین $\longrightarrow ۵۶ + ۴ = ۶۰$

این چرخ و فلک دارای ۴۰ کابین است پس ما در موقعیت کابین شمارهٔ ۲۰ قرار داریم. $۶۰ - ۴۰ = ۲۰$

@mathclass2 مجید قادری

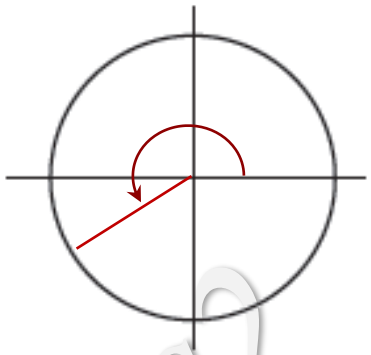
تمرین ۱ صفحهٔ ۹۵ کتاب درسی

برای هر یک از زاویه های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



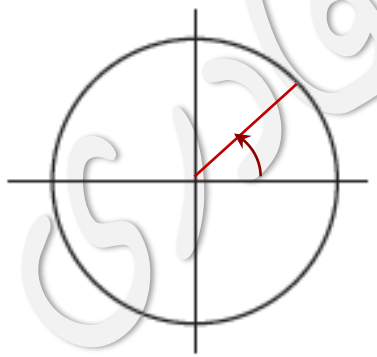
$\theta = -\frac{\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع چهارم است.



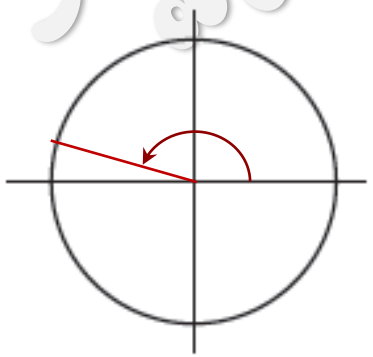
$\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

انتهای کمان در ربع سوم است.



$\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

انتهای کمان در ربع اول است.



$\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

انتهای کمان در ربع دوم است.

@mathclass2

تمرین ۲ صفحه ۹۵ کتاب درسی

طول برف پاک کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی متر است. فرض کنید برف پاک کن، کمانی به اندازه $^\circ$ ۱۲۰ طی می کند. $(\pi \cong ۳/۱۴)$

الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به دست آورید.

$$\frac{۱۲۰^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\text{رادیان } \pi} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{۱۲۰\pi}{۱۸۰} = \frac{۲\pi}{۳} \text{ رادیان}$$

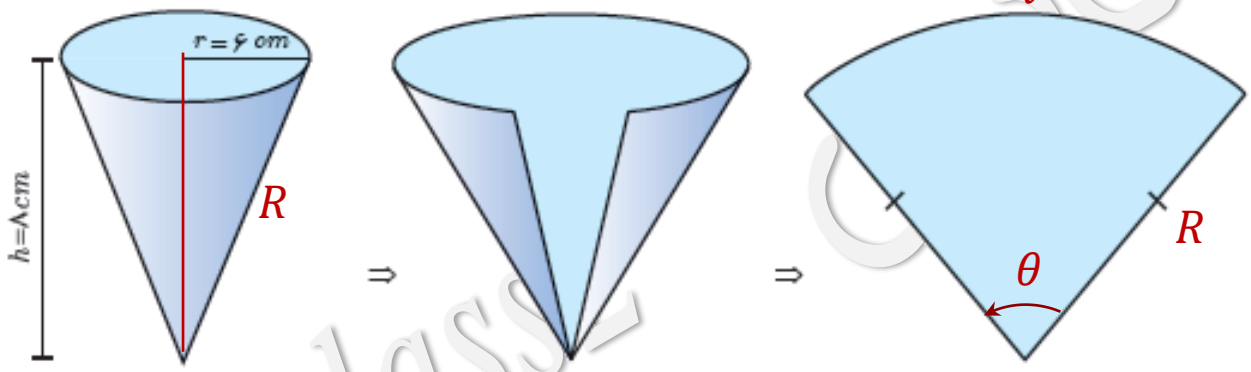
ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چند سانتی متر است؟

$$\alpha = \frac{l}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{۲\pi}{۳} = \frac{l}{۲۴} \quad \rightarrow \quad l = ۱۶\pi \cong ۵۰/۲۴ \text{ سانتی متر}$$

@mathclass2 مجید قادری

تمرین ۳ صفحه ۹۵ کتاب درسی

شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط ۶ سانتی متر و ارتفاع آن ۸ سانتی متر می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



برابر با محیط قاعدهٔ مخروط است

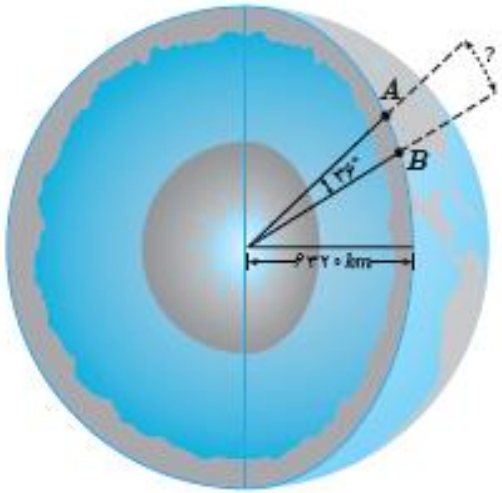
طبق رابطهٔ فیثاغورس : $R = \sqrt{۸^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$

$l = ۲\pi r \xrightarrow{r = ۲} l = ۱۲\pi$

$\theta = \frac{l}{R} = \frac{۱۲\pi}{۱۰} = \frac{۶\pi}{۵}$ رادیان

@mathclass

تمرین ۴ صفحه ۹۵ کتاب درسی



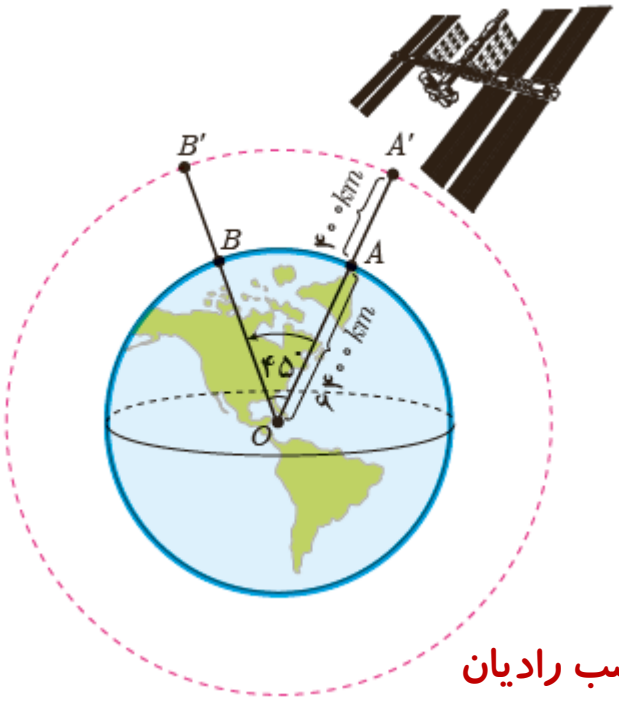
فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

$$\frac{۳۶^\circ}{۱۸۰^\circ} = \frac{R}{\text{رادیان } \pi} \Rightarrow \alpha = \frac{۳۶\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۵} \text{ رادیان}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{۵} = \frac{AB}{۶۳۲۰} \rightarrow AB = ۱۲۶۴\pi \cong ۳۹۶۹ \text{ کیلو متر}$$

@mathclass2 مجید قادری

تمرین تکمیلی



سوال ۶ : ایستگاه فضایی بین المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه 45° می سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می دهد؟

شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱) ابتدا زاویهٔ مرکزی 45° را به رادیان تبدیل می کنیم.

$$\text{اندازهٔ زاویهٔ مرکزی } \widehat{AOB} \text{ برحسب رادیان} = \alpha = 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان}$$

۲) شعاع مدار دایره ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، را تعیین می کنیم.

$$6400 + 400 = 6800\,km$$

۳) طول کمان روبه روی $\widehat{A'OB'}$ را می یابیم.

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow \quad l = r.\alpha \;= 6800 \times \frac{\pi}{4} = 1700\pi = 1700 \times 3/14 \cong 5338\,km$$

@mathcuss2

تمرین تکمیلی

سوال ۷ : درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعدهٔ این مثلث کوچک تر از اندازهٔ هر یک از ساق های آن است.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{۱}{۳/۱۴} \rightarrow D=\frac{۱۸۰^\circ}{۳/۱۴} \cong ۵۷/۳^\circ$$

درست است

مجموع زاویه های پای ساق ها $= ۱۸۰^\circ - ۵۷/۳^\circ = ۱۲۲/۷^\circ$

هر یک از زاویه های پای ساق ها $= ۱۲۲/۷^\circ \div ۲^\circ = ۶۱/۳۵^\circ$

ضلع روبه روی زاویه $۵۷/۳^\circ$ ضلع روبه روی زاویه $۶۱/۳۵^\circ$ $\rightarrow$ $۵۷/۳^\circ < ۶۱/۳۵^\circ$

در نتیجه اندازه قاعده مثلث نیز نسبت به اندازه دو ساق مثلث کوچک تر است.

ب) در دایره ای به شعاع ۱ سانتی متر طول کمان روبه روی زاویهٔ π رادیان تقریبا برابر با ۳/۱۴ سانتی متر است.

$$\alpha=\frac{l}{r} \rightarrow l=r.\alpha = ۱ \times ۳/۱۴ = ۳/۱۴\ cm$$

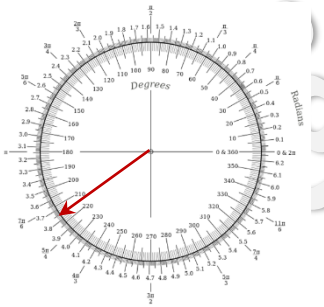
درست است

@mathclass2 مجید قادری

تمرین تکمیلی

پ) انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

$$\frac{D}{۱۸۰^\circ}=\frac{R}{\pi} \rightarrow D=\frac{۶\pi}{۵}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۲۱۶^\circ$$



نادرست است

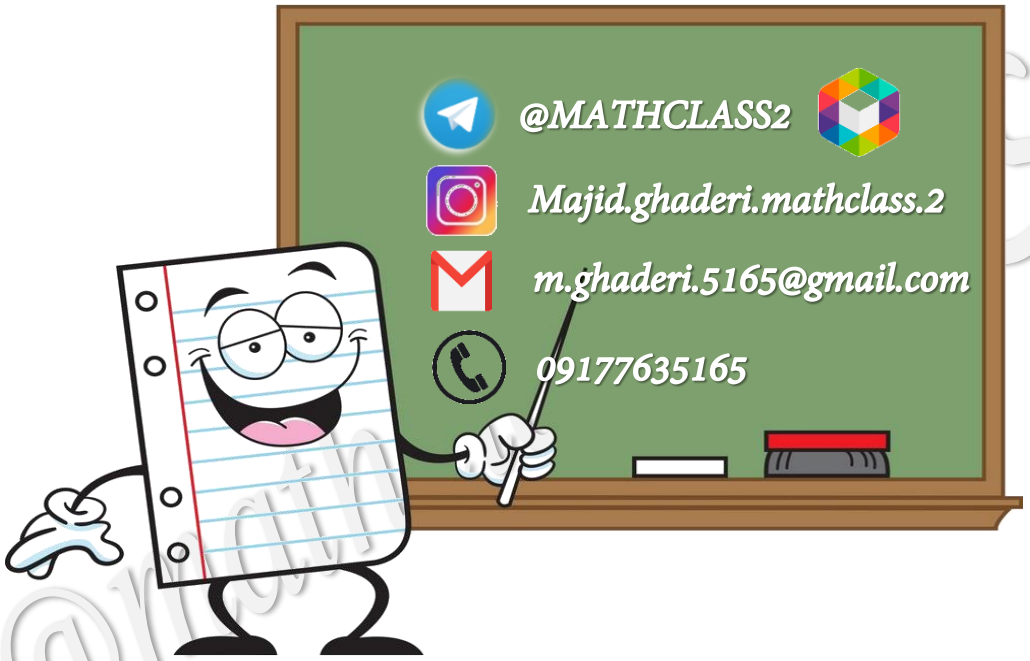
ت) زاویه های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان و $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می دهند.

$$D=\frac{۲\pi}{۳}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۱۲۰^\circ$$
$$D=\frac{\pi}{۹}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۲۰^\circ$$
$$D=\frac{۷\pi}{۳۶}\times\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}=۳۵^\circ$$
$$\Rightarrow ۱۲۰^\circ+۲۰^\circ+۳۵^\circ\neq ۱۸۰^\circ$$

نادرست است

@mathclass2

پایان درس اول



مجید قادری
@math