



درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

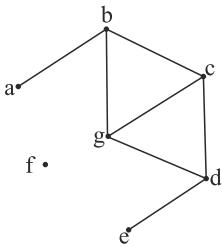
۱ اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

۲ هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول اند.

۳ گراف حاصل از مدل سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.

۴ گراف ۳ منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

۵ باتوجه به گراف  $G$  (شکل زیر) به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف یک  $a - c$  مسیر به طول ۳ بنویسید.

ب یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ درجه رأس  $a$  در گراف  $G$  را تعیین کنید.

ت آیا گراف  $G$  همبند است؟ چرا؟

ث یک زیرگراف تهی ۵ رأسی از گراف  $G$  رسم کنید.

۶ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۷ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$  و مجموعه یال‌های  $E(G) = \{ae, bc, bd, be, ec, ed\}$  مفروض است. بدون کشیدن نمودار آن به قسمت‌های (الف) تا (ج) پاسخ دهید.

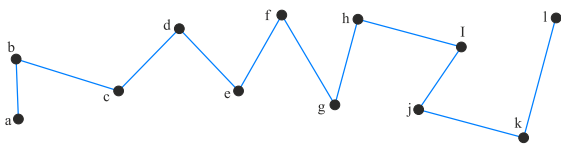
الف مجموعه همسایگی باز رأس  $d$  را بنویسید.

ب اندازه گراف را مشخص کنید.

پ مجموع درجات رئوس این گراف برابر با چند است؟

۸ گراف کامل  $K_p$  دارای ۳۶ یال است. در این گراف، مرتبه گراف و  $\Delta(G)$  را مشخص کنید.

۹ گراف  $(P_{12})$  در شکل زیر رسم شده است.



الف یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال  $\underline{6}$  عضوی از آن را مشخص نمایید.

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

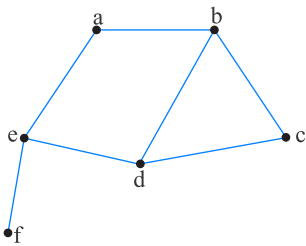
۱۰ یک گراف کامل  $8$  رأسی، ..... یال دارد.

۱۱ در یک گراف از مرتبه  $10$  با  $\Delta = 3$ ، حداقل ..... رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است.

۱۲ اگر در گراف  $G$  از مرتبه  $p$  داشته باشیم  $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت  $\Delta(G)$  برابر ..... است.

۱۳ مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین  $5 \times 5$  در  $5$  برابر با ..... است.

۱۴ شکل زیر نمودار گراف  $G$  می‌باشد.



الف مرتبه و اندازهٔ گراف  $G$  را بنویسید.

ب مجموعهٔ  $N_G(b)$  را بنویسید.

پ مجموع درجه‌های رأس‌های گراف  $\bar{G}$  را مشخص کنید.

۱۵ گراف  $C_7$  را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

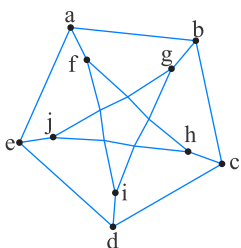
الف یک مجموعهٔ احاطه‌گر  $4$  عضوی بنویسید.

ب عدد احاطه‌گری  $C_7$  را به دست آورید.

پ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.

۱۶ ثابت کنید هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

۱۷ در گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال  $5$  عضوی را مشخص کنید.



- ۱۸ یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
- ۱۹ یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۲۰  $[a, b] = c$  اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

- ۱)  $a|c, b|c$       ۲)  $\forall m > 0, \dots$

۲۱ گراف  $G$  را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۲۲ مقدار  $\chi(C_n)$  به ازای هر عدد طبیعی  $n > 2$  برابر است با: .....

۲۳ هرگاه  $(kn + 1)$  کیوتر یا بیشتر در ..... لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ..... کیوتر در آن قرار گرفته است.

۲۴ گراف  $G$  با مجموعه رأس‌های  $V = \{a, b, c, d, e, f\}$  و مجموعه یال‌های زیر در نظر بگیرید:

$$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$$

الف نمودار گراف را رسم کنید.

ب  $N_G[b]$  را مشخص کنید.

پ یک مسیر به طول ۵ از  $b$  به  $d$  بنویسید.

۲۵ یک گراف ۵ رأسی غیرتهی  $k$ -منتظم رسم کنید به طوری که:

الف  $k$  بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب  $k$  کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

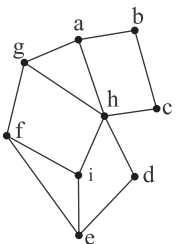
۲۶ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف گراف  $P_8$  را رسم کنید.

ب یک  $\gamma$ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

پ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۲۷ در گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن‌ها را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.



درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

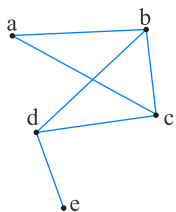
۲۸ اگر  $a|b$  آنگاه  $|a, b| = |b|$ .

۲۹ معادلهٔ همبستگی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, b) | m$ .

۳۰ تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

۳۱ تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۲ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی برابر ۶ است.

۳۲ گراف  $G$  به صورت زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف  $\delta(G)$  را مشخص کنید.

ب اندازهٔ گراف را تعیین کنید.

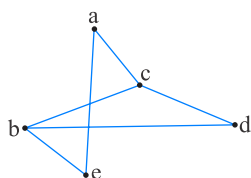
پ مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس  $b$  را بنویسید.

ت اگر  $N_G(d) = \{e, x, b\}$  باشد، کدام رأس  $x$  است؟

۳۳ گراف  $k$ -منتظم از مرتبهٔ  $n$  را تعریف کنید.

۳۴ آیا گراف ۳-منتظم از مرتبهٔ ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

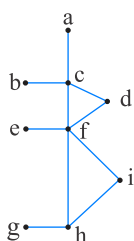
۳۵ گراف  $G$  به صورت زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب مکمل گراف  $G$  را رسم کنید.

۳۶ برای گراف زیر:



الف یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

ب مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۳۷ اگر  $n$  تعداد رئوس گراف و  $\Delta$  ماکزیمم درجه گراف باشد:

الف گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  است.

ب گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از  $\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil$  باشد.



پاسخ سوالات ۱ تا ۴

۱ درست (۰/۲۵)

۲ درست (۰/۲۵)

۳ نادرست (۰/۲۵)

۴ درست (۰/۲۵)

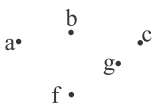
۵ الف (۰/۲۵) abgc

ب (۰/۲۵) bcdgb

پ (۰/۲۵)  $\deg_{\bar{G}}(a) = 5$ 

ت خیر چون مثلاً از f به a مسیری وجود ندارد. (۰/۵)

ث (۰/۲۵) نمره



۶ فرض کنیم  $G$  یک گراف و  $A$  مجموعه همه رئوس فرد گراف  $G$  و  $B$  مجموعه همه رئوس زوج گراف  $G$  باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v) \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف  $G$  عددی زوج است؛ یعنی  $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$  عددی زوج (۰/۲۵) است و

همچنین می‌دانیم  $\sum_{v \in B} \deg(v)$  نیز عددی زوج است، بنابراین تفاضل آن‌ها نیز زوج خواهد شد. (۰/۲۵)

پس  $\sum_{v \in A} \deg(v)$  زوج است و در صورتی مجموع عددهای فرد زوج می‌شود که تعداد آن‌ها زوج باشد، در نتیجه  $n(A)$  عددی زوج است. (۰/۲۵)

۷ الف (۰/۵)  $N_G(d) = \{b, e\}$

$$q = 6 \quad \text{ب} \quad (0/25)$$

$$12 = \text{مجموع درجات رئوس} \quad \text{پ} \quad (0/25)$$

$$q_{K_p} = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{نکته: در گراف کامل داریم:} \quad \text{۸}$$

$$q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2} \quad (0/25) \Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} = 36 \quad (0/25)$$
$$\Rightarrow p = 9 \quad (0/25), \quad \Delta(G) = p - 1 = 8 \quad (0/25)$$

$$\{b, e, h, k\} \quad \text{الف} \quad ۹$$

$$\{a, c, e, g, I, k\} \quad \text{ب}$$

پاسخ سوالات ۱۰ تا ۱۳

$$۲۸ \quad ۱۰$$

$$۳ \quad ۱۱$$

$$p - 1 \quad ۱۲$$

$$۱۵ \quad ۱۳$$

$$\text{الف} \quad ۱۴$$

$$p = 6, \quad q = 7$$

$$N_G(b) = \{a, d, c\} \quad \text{ب}$$

$$\text{تعداد یال‌های گراف } G + \text{تعداد یال‌های گراف } \bar{G} = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{پ}$$

$$16 = \text{مجموع درجه‌های رئوس گراف } \bar{G} \Rightarrow \text{تعداد یال‌های گراف } \bar{G} = 8$$

$$\{v_1, v_3, v_4, v_5\} \quad \text{الف} \quad ۱۵$$

$$\gamma(G) = 3 \quad \text{ب}$$

$$\{v_1, v_3, v_5\}, \quad \{v_2, v_4, v_6\} \quad \text{پ}$$

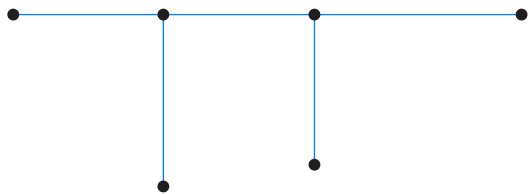
۱۶

اگر  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال باشد، در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعه احاطه‌گر مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضو  $a_1$  مانند  $a_1$  را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

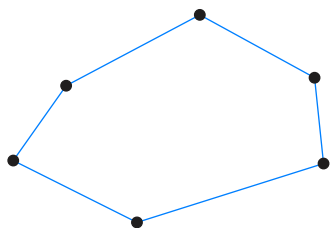
۱۷

$$A = \{h, g, f, i, j\}$$

۱۸



۱۹



پاسخ سؤالات ۲۰ تا ۲۳

۲۰

$$\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

۲۱

همبند

۲۲

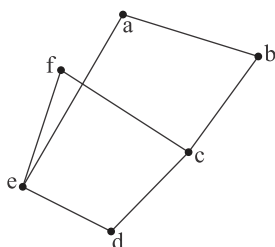
$$\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$$

۲۳

به ترتیب متن سؤال  $n$  و  $(k + 1)$ .

۲۴

الف



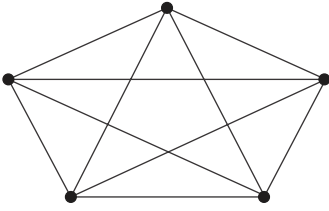
$$N_G[b] = \{a, b, c\}$$

ب

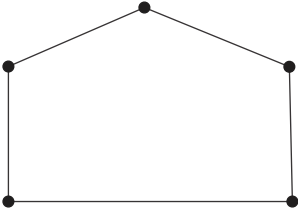
$$b, a, e, f, c, d$$

پ





ب



{a, d, g}

ب

{a, d, e, h}

پ

۲۷ یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال به صورت  $\{a, h, f, b\}$  است. اکنون با حذف رأس  $a$  از آن، یک مجموعه احاطه گر مینیمال به دست می آید.

پاسخ سؤالات ۲۸ تا ۳۱

۲۸ درست

۲۹ نادرست

۳۰ نادرست

۳۱ درست

۳۲ الف  $\delta(G) = 1$

ب  $q = 6$

پ  $N_G[b] = \{b, a, c, d\}$

ت  $x = c$

گرافی از مرتبه  $n$  که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد  $k$  ( $0 \leq k < n$ ) باشد.

۳۳

وجود ندارد. زیرا:

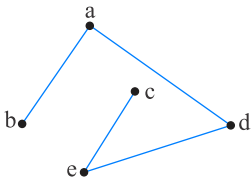
۳۴

$$\sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q \Rightarrow 5 \times 3 = 2q \quad \text{تناقض}$$

a, c, d, b, e, a

الف ۳۵

ب



مجموعه احاطه گر با ۴ عضو مانند: {c, f, h, g}

الف ۳۶

احاطه گر مینیمال مانند: {c, f, g}

ب

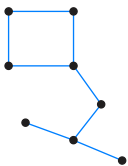
برای مثال اگر  $n = 10$ , رسم  $C_{10}$  یا  $P_{10}$  در این گرافها:

الف ۳۷

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 4$$

در گرافی مشابه

ب



$$\gamma(G) = 3 \quad \text{ولی} \quad \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2 \quad \text{است.}$$