



حد تابع



بخش پذیری چند جمله ای ها

ابتدا قبل از ادامه دادن حد از سال یازدهم کمی در مورد بخشپذیری چندجمله ای ها بر  $X - a$  صحبت کنیم.

فرض کنید چند جمله ای  $f(x)$  داده شده است و باقیمانده تقسیم آن بر  $X - a$  را میخواهیم.

$$x - a = 0 \rightarrow x = a \rightarrow R = f(a) \text{ باقیمانده}$$

یعنی اگر ریشه مقسوم علیه را در چند جمله ای داده شده قرار دهیم باقیمانده به دست می آید.

نتیجه: اگر در تقسیم  $f(x)$  بر  $x - a$  داشته باشیم  $f(a) = 0$  انگاه می گوییم چند جمله ای بر  $x - a$  بخشپذیر است.

مثال: باقیمانده تقسیم چند جمله ای  $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$  را بر  $x - 1$  بیابید.

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. دی ۹۸

چند جمله ای  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 10$  بر دو جمله ای  $x + 2$  بخش پذیر است.





مثال: چند جمله ای  $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$  را در نظر بگیرید.

الف) آیا  $f(x)$  بر  $(x-1)$  بخش پذیر است؟ چرا؟

ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.

پ)  $f(x)$  را به صورت حاصل ضرب عامل هایش بنویسید.

مثال: آیا چند جمله ای  $x^3 + 3x^2 - 4x - 6$  بر  $x+1$  بخش پذیر است؟

مثال: باقیمانده تقسیم  $p(x) = x^4 - kx^2 + 2x^2 + 3$  بر  $x-2$  برابر  $-5$  است مقدار  $k$  را بیابید.

مثال: اگر باقیمانده تقسیم  $p(x+1) = 4x^2 - mx^2 - 3x + 2$  بر  $x+1$  برابر  $4$  باشد، مقدار  $m$  چقدر است؟





مثال: در تقسیم چند جمله ای  $x^4 - 3x^2 + 4x^2 + 1$  بر  $x - 1$  خارج قسمت  $q(x)$  و

باقیمانده برابر ۳ است. باقی مانده تقسیم  $q(x)$  بر  $x + 2$  چقدر است؟

### حد توابع جبری به صورت $\frac{0}{0}$ و رفع ابهام آن



هر گاه در محاسبه حد به حالتی رسیدید که هم صورت و هم مخرج صفر شده بود این حالت را مبهم نامیده و سعی می کنیم این حالت را رفع کنیم. برای این کار باید عاملی که باعث صفر شدن صورت و مخرج شده است را پیدا کرده و آن را از صورت و مخرج حذف کنیم. در بیشتر مواقع وقتی  $x \rightarrow a$  عبارت  $x - a$  را عامل صفر کننده ی صورت و مخرج میدانیم.

پس باید سعی کنیم  $x - a$  را از صورت و مخرج بیرون بکشیم. در چند جمله ای ها این کار را با تقسیم بر  $x - a$  انجام میدهیم.

مثال: حدهای خواسته شده زیر را بیابید.

الف) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2}$$

ب) 
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$





پ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{3 - 4x + x^2}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

حد توابع رادیکالی به صورت  $\frac{0}{0}$  و رفع ابهام آن

تعریف



در توابع رادیکالی برای از بین بردن رادیکال که بتوانیم  $X - a$  را بیرون بیاوریم باید به فرجه دقت کنیم. اگر فرجه زوج باشد اتحاد مزدوج و اگر با فرجه ۳ مواجه بودید از اتحاد چاق و لاغر کمک بگیرید تا عامل  $X - a$  بیرون بیاید.

مثال: حدهای خواسته شده را بیابید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 16}$

شهریور ۹۸





ب)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{3 - \sqrt{x+3}}{x-6}$

پ)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x^2 - x - 3}{4x^2 - 4x - 3}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - x}{1-x}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$





$$ج) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{2x + \sqrt{x} - 1}{4x - 1}$$

$$ج) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4\sqrt{x} + 3}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$$

مثال: حد زیر را حساب کنید. دی ۹۷

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}$$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود بیابید. خرداد ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$$

مثال: حد تابع روبرو را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۸





$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + \sqrt{2x + 3}}$$

مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - \sqrt{x + 6}}$$

مثال: حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. تیر ۹۹

### حد بی نهایت



فرض کنید تابع  $f$  در یک همسایگی راست نقطه  $a$  تعریف شده باشد. مفهوم  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  این است که مقدار تابع

$f$  میتواند از هر عدد مثبتی بیشتر شود هر گاه  $x$  بتواند از سمت راست به مقدار دلخواه به  $a$  نزدیک شود.

و مفهوم این است که  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  این است که مقدار تابع میتواند از هر عدد منفی کمتر شود هر گاه  $x$  بتواند از

سمت چپ به مقدار دلخواه  $a$  به نزدیک شود.

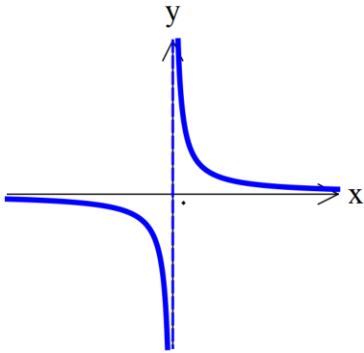
در شکل زیر میخواهیم حد تابع را اطراف  $x = 0$  بررسی کنیم:





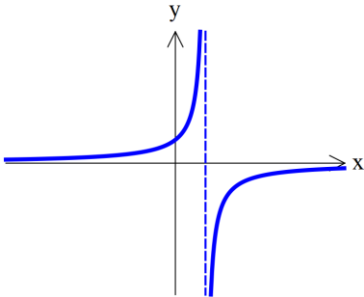
یعنی باید بررسی کنیم وقتی از سمت راست به  $x = 0$  نزدیک میشویم چه اتفاقی برای  $f(x)$  میفتد و

وقتی از سمت چپ به  $x = 0$  نزدیک میشویم چه اتفاقی برای  $f(x)$  میفتد.

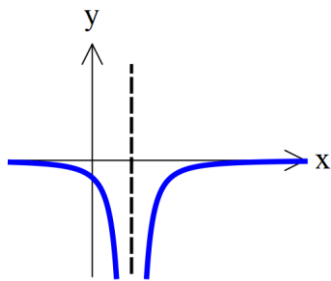


$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

مثال: در شکل زیر تابع  $f$  رسم شده است.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  را بیابید.



مثال: قسمتی از نمودار تابع  $f$  به صورت شکل زیر است. حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ؟







قضایای حدهای نامتناهی



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & n = \text{ج} \\ -\infty & n \neq \text{ج} \end{cases} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty \quad \text{اگر } n \text{ عددی طبیعی باشد آنگاه:}$$

$$(۲) \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \bullet \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq \bullet \quad \text{اگر } y = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ تابع آنگاه تابع در نقطه } a \text{ حد نامتناهی (بینهایت) دارد و}$$

علامت بی نهایت را با توجه به علامت  $L$  و علامت مقادیر تابع مخرج در همسایگی محذوف مورد نظر تعیین می کنیم.

مثال: حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{2-x}$

ب)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2}$

تیر ۹۸

پ)  $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x - 4}$

ت)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{(x+3)^2}$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{|x-2|}$

ج)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x]-3}{x+2}$

چ)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|}$

دی ۹۸





**نکته:** در توابعی که مثلثاتی هستند حتماً باید دقت کنید که تابع مثلثاتی داده شده در کدام ربع مثلثاتی قرار

دارد و علامت مخرج را از روی ربع دایره مشخص کنید.

**مثال:** حد توابع زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x$

پ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x$

ت)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot x$

ث)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x}$

شهریور ۹۸

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3}$

**مثال:** حد تابع زیر را بدست آورید. دی ۹۷ تیر ۹۹





مثال: حد تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید. خرداد ۹۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x}$$

### حد در بینهایت



هنگامی که  $X \rightarrow +\infty$  یا  $X \rightarrow -\infty$  حد مورد نظر را حد در بینهایت میگوییم.

◆ منظور از  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل  $(a, +\infty)$  تعریف شده است و  $f(x)$  را میتوان به

هر مقدار دلخواه به  $L$  نزدیک کرد مشروط بر اینکه  $X$  بزرگ شود. (یعنی  $X$  به سمت مثبت  $\infty$  میل کند)

◆ منظور از  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  آن است که مقدار تابع در بازه ای مثل  $(-\infty, b)$  تعریف شده است و  $f(x)$  را میتوان به

هر مقدار دلخواه به  $L$  نزدیک کرد مشروط بر اینکه  $X$  به اندازه کافی کوچک شود. (یعنی  $X$  به سمت منفی  $\infty$  میل کند)

در این نوع حدها میخواهیم رفتار تابع را در  $\infty$  بررسی کنیم.

اگر عبارت داده شده چند جمله ای باشد، فقط جمله ای که بیشترین توان را دارد در اولویت قرار میدهیم.

به طور مثال:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x = -\infty$  یا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$





مثال: حدود زیر را محاسبه کنید.

الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x} - \frac{3}{x^2} \right)$

ب)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{15x - 9}{12x + 2}$

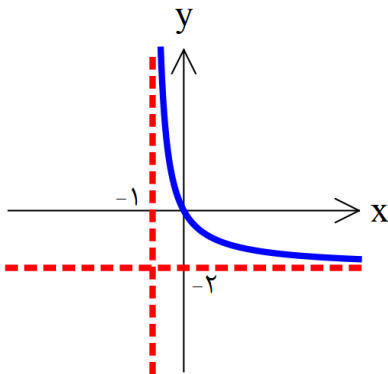
مثال: حد تابع  $f(x) = \frac{-3x^7 + 5x^2}{2x^3 + 9}$  وقتی  $x \rightarrow -\infty$  میل میکند برابر ..... میباشد. شهریور ۹۸

مثال: جای خالی را کامل کنید. دی ۹۷

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{5x^2 - 3x}{-x^2 + 1} & x \leq 0 \end{cases}$$

حد تابع وقتی  $x \rightarrow -\infty$  برابر ..... است.

مثال: با استفاده از نمودار تابع  $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



الف)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$     ب)  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

خرداد ۹۸

مثال: تابعی مثال بنویسید که حد آن در  $+\infty$  برابر  $-10$  باشد.

